veras
revista acadêmica de Educação do Instituto Vera Cruz

ISSN 2236-5729

Introdução às frações sem simplificações

Introduction to fractions without simplifications

Paula Monteiro Takada, pós-graduada em Didática da Matemática pelo Instituto Vera Cruz.
Contato: patakada@gmail.com

Mayra Capelossi Luiz, pós-graduada em Didática da Matemática pelo Instituto Vera Cruz.
Contato: mayracapelossi@gmail.com

Resumo

Neste artigo, analisamos, com base na Teoria das Situações Didáticas, uma experiência de introdução ao estudo dos números racionais em sua representação fracionária, com uma turma 4º ano do Ensino Fundamental 1, em uma escola privada da cidade de São Paulo. O objetivo era avaliar a viabilidade de apresentar esse conteúdo, sem simplificá-lo, com propostas mais complexas do que as convencionalmente trabalhadas nessa fase. Os alunos foram desafiados a resolver problemas abertos, que demandaram investigações e interações entre os colegas. Nossa hipótese era a de que as atividades simplificadas representavam um obstáculo para a compreensão desse objeto de conhecimento. Como resultado, constatamos em uma avaliação individual que 19 dos 23 alunos se apropriaram do conteúdo abordado.
Palavras-chave: Frações. Racionais. Teoria das Situações Didáticas.

Abstract

In this article, we analyze, based on the theory of didactic situations, an event of introduction to the study of fraction representation of rational numbers to a 4th grade class in a private school in the city of São Paulo. The objective was to

evaluate the feasibility of presenting this content without simplifications, bringing to the students more complex proposals than those conventionally presented at this stage. Students were challenged to solve open problems, which demanded investigations and interactions among colleagues. Our hypothesis was that simplified activities represents an obstacle to understanding this object of knowledge. As a result, we found out, through an individual assessment with the students, that 19 out of the 23 students properly acquired the content addressed.
Keywords: Fractions. Rational. Theory of Didactic Situations.

Introdução

As primeiras aproximações do conjunto dos números racionais e suas representações fracionárias, realizadas no Ensino Fundamental 1, em geral, representam um desafio significativo para os alunos, pois as relações estudadas anteriormente por eles no conjunto dos números naturais mostram-se, a princípio, insuficientes para a resolução dos novos problemas, pois tudo parece estar invertido: os alunos chegam a esse momento certos de que o dobro de 2 é 4 e de que a metade de 4 é 2. Como compreender, então, que o dobro de 1/2 é 1 e que a metade de 1/4 é 1/8?

Há um consenso entre os professores que trabalham com essa faixa etária a respeito da complexidade desse conteúdo e da dificuldade dos alunos em compreendê-lo. Portanto, ao introduzir o estudo desses números, a tendência é simplificá-lo, limitando-se, por exemplo, a apresentar uma fração por vez e separadamente – 1/2, depois 1/3, depois 1/4 etc. – e, muitas vezes, apoiando o trabalho apenas em atividades com materiais concretos. A aposta é a de que trabalhando com coisas reais – como fracionar um bolo ou uma pizza – os alunos compreenderão melhor o assunto.

Nossa hipótese é a de que essas simplificações, por mais bem-intencionadas, podem representar obstáculos à construção dos sentidos complexos das frações e ao posterior aprofundamento desse conteúdo nas etapas seguintes de ensino. Dessa maneira, a breve investigação apresentada neste artigo buscou aproximações às respostas da seguinte pergunta: como introduzir o estudo das frações sem negar sua complexidade aos alunos?

Tal premissa tem como base a proposta de trabalho apresentada por pesquisadores argentinos em um documento curricular de Buenos Aires para alunos do 4º ano:

> "Sería legitimo preguntarse – muchos maestros lo preguntan –: "por qué complicar las cosas, si el trabajo 'paso a paso' da resultado? La pregunta remite nuevamente a la cuestión del sentido que estamos atribuyendo a la matemática en la escuela: desde nuestro punto de vista, las nociones que estuvimos mencionando (fracción de fracción, equivalencia, reparto equitativo) están imbricadas unas con otras; por eso, tratarlas juntas en un contexto particular permite arrancar el estudio de las fracciones con un conjunto más amplio y más sólido de relaciones que se irán retomando con el tiempo. Tratar cada una de estas nociones de manera aislada puede ser en el momento más fácil para los alumnos, pero, al ser también más superficial, se torna "menos duradera". Menos duradera porque olvidan fácilemnte aquello que no aparece entramado en una organización donde las distintas nociones que componen un campo de conceptos se relacionan unas con otras. Detrás de la idea de "lo fácil" y "lo difícil" hay cuestiones importantes para discutir respecto de la experiência formativa que se pretende impulsar. (PARRA, 2005, p.14)

Para analisar os alcances dessas premissas, realizamos uma pesquisa qualitativa, por meio de um estudo de caso com estudantes do 3º trimestre do 4º ano do Ensino Fundamental de uma escola privada localizada na zona oeste de São Paulo. A turma era composta por 23 estudantes (14 meninos e 9 meninas) que foram agrupados em trios, quartetos ou quintetos para resolver as atividades apresentadas.

Considerando os fundamentos da Teoria das Situações Didáticas – que será apresentada mais a diante –, e as proposições para o desenvolvimento de Mentalidades Matemáticas, planejamos uma sequência didática constituída por três propostas com problemas que priorizavam diferentes aspectos das frações. Os enunciados de todos os problemas estão listados no ANEXO 1.

Proposta 1: situações para seguir repartindo o resto da divisão (Fig. 1).

Proposta 2: compor uma quantidade a partir de outras expressas em frações. (Fig. 2)

Proposta 3: frações no Tangram. (Figs. 3, 4 e 5)

Finalizamos essa primeira etapa da sequência com uma situação de sistematização dos conhecimentos construídos até aquele momento. Os resultados finais de aprendizagem foram evidenciados em uma avaliação individual respondida pelos 23 estudantes, ao final do trimestre.

A análise realizada neste estudo está baseada nas evidências coletadas nos registros de resolução dos alunos para os problemas apresentados nas três propostas, na sistematização parcial e na avaliação final. Além disso, todas as propostas foram gravadas em vídeo. Assim pudemos ver e rever as interações entre os estudantes e as intervenções feitas pela professora. Portanto, tanto o registro produzido pelos 23 alunos quanto as gravações compuseram o corpus de análise desta breve pesquisa.

1. Fundamentação teórica

a. Teoria das Situações Didáticas

O estudo de caso apresentado neste artigo foi planejado e será analisado sob a perspectiva da Teoria das Situações Didáticas proposta por Brousseau (2008). As situações didáticas são compostas por momentos de ação, formulação e validação por parte dos alunos. Esses momentos não são estanques e apresentam-se interligados, predominando em cada fase um tipo de comportamento, com a permanência dos demais.

Para construir essa teoria, Brousseau parte das evidências obtidas anteriormente por Piaget. "Dispositivos piagetianos mostraram que as crianças podiam se adaptar desenvolvendo conhecimentos matemáticos ainda não ensinados" (BROUSSEAU, 2008, p. 18). Esse pensamento foi um guia importante de suas pesquisas, pois revela a existência de um processo interno do aluno responsável pela construção de conhecimento (a despeito da transmissão direta, verbal, ou da imitação de processos com os quais o aluno teve contato). Brousseau passou a buscar as condições para que o sujeito tivesse a necessidade de resolver um problema proposto, colocando em jogo o que já conhecia e construindo novos conhecimentos. Assim, chegou ao conceito de situação didática: um contexto que conjuga interações entre o professor, o aluno e um determinado saber, também conhecido como triângulo didático. Essas interações acontecem com base em um meio – que pode ser um jogo, uma situação-problema, um desafio ou até um exercício –, denominado de *milieu*.

Dessa maneira, cabe ao professor criar situações em que haja interação do sujeito com a proposta (o *milieu*), sem a necessidade da presença constante do professor intervindo no processo. O *milieu* deve estar imbuído de intenções didáticas, que refletem as escolhas feitas pelo professor dos problemas propostos aos alunos, e que irão levá-los a entrar no processo de construção dos conhecimentos, adaptando-se a esse meio e assim apresentando novas respostas que levam à aprendizagem. De acordo com Perrin-Glorian (2008), o *milieu* seria um quarto aspecto em interação no modelo didático – além do aluno, do professor e do saber – sobre o qual tanto o professor quanto os alunos agem. O professor, como sendo o responsável por propor e planejar esse *milieu* e os alunos como sendo os que vão agir sobre ele, solucionando-o.

O *milieu* não pode ser entendido como um facilitador, ele é um antagonista ao sujeito. Os problemas que o professor propõe devem representar um desafio ajustado: o aluno possui certos conhecimentos, mas estes precisam ser insuficientes, criando a necessidade de mobilizar e reorganizar outros novos para conseguir resolver a situação.

Em outras palavras, Quaranta e Wolman (2006) resumem as etapas da Teoria das Situações Didáticas da seguinte maneira:

> Para que os alunos possam evoluir em seus conhecimentos, é necessário, então, que *atuem* para resolver problemas (situações de ação), isto é, que as situações propostas provoquem a elaboração e a colocação em funcionamento de conhecimentos implícitos; que *possam explicitá-los*, que os *expressem em uma linguagem* compreendida por todos (situações de formulação) e que *validem* sua utilização por meio de provas (situações de validação). (QUARANTA e WOLMAN, 2006, p. 115)

Ao planejar as atividades de introdução às frações, buscamos construir um *milieu* com situações desafiadoras, proporcionando aos alunos momentos predominantemente de ação, de formulação e de validação, para que mobilizassem e construíssem de maneira autônoma novos conhecimentos acerca das frações.

Dentro dessa concepção, Brousseau destaca a importância de se estabelecer um contrato didático em que o aluno aceite se responsabilizar pela construção do próprio conhecimento, assumindo, assim, uma postura ativa diante do próprio aprendizado. Faz parte desse tipo de contrato didático a noção de devolução, ou seja, o professor devolve ao aluno a tarefa de se lançar na solução das situações-problema apresentadas, sem oferecer os conhecimentos que permitem resolvê-las, já que são justamente esses conhecimentos que busca fazer o aluno construir. De acordo com o pesquisador francês:

> A *devolução* apresenta grandes dificuldades que são analisadas tradicionalmente no que se refere à motivação do aluno. As soluções

> preconizadas são, portanto, de natureza psicológica, psicoafetiva ou pedagógica. Pois bem, o significado do conhecimento e da situação desempenham um papel importante nesse processo e, em resultado, a didática propõe os meios específicos. (BROUSSEAU, 2008, p. 91)

Portanto, para que os alunos aceitem o desafio intelectual e a responsabilidade por construir seus próprios conhecimentos, aderindo assim ao contrato didático proposto por Brousseau, é preciso garantir um clima favorável a esse modo de trabalho em sala de aula. As crianças precisam se sentir seguras para arriscar e testar respostas, compartilhar suas hipóteses com seus colegas, refutar hipóteses que se mostrarem inválidas, aceitando que o erro faz parte de um processo de construção de conhecimento. O papel do professor é fundamental para criar esse clima de trabalho, incentivando a troca de informações sem julgá-las certas ou erradas, promovendo um ambiente de debate em que todos se sintam respeitados ao expor suas ideais e encorajados a sugerir os passos que precisam ser dados.

b. Teoria das Situações Didáticas e Mentalidades Matemáticas

A Teoria das Situações Didáticas teve seus primeiros elementos investigados e publicados por Guy Brousseau na década de 1970. Em outro contexto científico e acadêmico, a britânica Jo Boaler, atual pesquisadora e docente da Universidade de Stanford, agrega descobertas recentes da neurociência à proposta de um ensino de matemática mais eficiente. Encontramos pontos convergentes entre a Teoria das Situações Didáticas de Brousseau e a construção de uma Mentalidade Matemática proposta por Boaler, cujos primeiros estudos foram publicados na década de 1990.

Primeiramente, Boaler (2018) caracteriza a mentalidade matemática como uma capacidade cerebral acessível a todos, desde que sejam adequadamente estimulados para isso. Ela busca, dessa maneira, romper com o estigma de que algumas pessoas têm um “dom matemático” natural (2018, p. 5), defendendo que a plasticidade cerebral permite a qualquer pessoa neurologicamente saudável aprender matemática em níveis elevados. Para isso, é necessário que as pessoas desenvolvam uma mentalidade de crescimento (flexível) em oposição a uma mentalidade fixa. Essa flexibilidade faz com que lidem melhor com os erros, considerando-os uma etapa importante da aprendizagem e demonstrando maior persistência na superação de desafios. Os sujeitos de mentalidade fixa podem ter uma autoimagem negativa – não se consideram inteligentes, portanto, seriam incapazes de aprender – ou positiva – se consideram muito inteligentes, portanto, nunca erram. Para ambos, os erros são barreiras intransponíveis ou traumatizantes que os fazem desistir mais facilmente da busca pela solução adequada para os problemas.

Está na mão dos professores criar condições para que os alunos possam desenvolver uma mentalidade fixa ou uma mentalidade de crescimento. Identificamos aqui uma convergência com a noção de devolução de Brousseau, pois o professor delega ao aluno algo que, em um modelo de ensino transmissivo, lhe foi retirado: a responsabilidade pela construção do próprio conhecimento, aceitando enfrentar os desafios que lhe são propostos, colocando em jogo o que já sabe e disposto a avançar e adquirir conhecimentos novos. Só é possível entrar nesse contrato didático se a devolução for aceita, da mesma maneira que só é possível acessar níveis elevados de conhecimento matemático com uma mentalidade de crescimento, rejeitando a mentalidade fixa. Reiterando, cabe ao professor criar o clima favorável tanto para o desenvolvimento da mentalidade de crescimento como para a aceitação da devolução.

Ao tratar das características das tarefas que fazem os alunos se engajarem nas aulas de matemática, Boaler (2018) elenca elementos que intensificam o potencial de aprendizagem. Aqui identificamos outros pontos em comum com a Teoria das Situações Didáticas, já que a tarefa pode ser relacionada ao *milieu* e tais elementos das tarefas dialogam com os momentos de ação, formulação e validação das situações didáticas. Boaler resume da seguinte maneira suas sugestões:

> 1. Abra a tarefa para que haja diversos métodos, rotas e representações; 2. Inclua oportunidades de investigação; 3. Formule o problema antes de ensinar o método; 4. Acrescente um componente visual e pergunte aos alunos como eles veem a matemática; 5. Amplie a tarefa para que ela tenha 'piso mais baixo e teto mais alto'; 6. Peça aos alunos que convençam e argumentem; sejam céticos. (BOALER, 2018, p. 77)

Ao propor que os professores apresentem um problema antes de ensinar o método (item 3), Boaler sugere o mesmo que Brousseau, ao fundamentar a Teoria das Situações Didáticas em dispositivos piagetianos que demonstraram que as crianças são capazes de construir por si próprias conhecimentos matemáticos que não foram ensinados. Esse princípio caracteriza tanto a tarefa engajadora de Boaler quanto o *milieu* de Brousseau.

A proposição de tarefas abertas, que criam oportunidades para investigação (itens 1 e 2) estão em estreita relação com as situações de ação em que os alunos precisam agir sobre o *milieu* antagonista proposto pelo professor, lançando mão de todo repertório de conhecimento que já possuem.

Por fim, ao sugerir que os alunos busquem convencer os colegas por meio de argumentos, Boaler destaca a importância também ressaltada por Brousseau das situações de formulação e validação, em que os alunos precisam tornar explícitos – expressando por meio da linguagem compreendida por todos – conhecimentos que até então estavam implícitos. Por isso, o trabalho em parceria com os colegas é uma condição imprescindível para que haja a necessidade de intercâmbio de ideias e argumentos.

c. As concepções de frações

Ancoramos o planejamento das propostas analisadas neste trabalho nas conceituações sobre fração propostas por Silva (2017). A pesquisadora apresenta tarefas e técnicas fundamentais de serem trabalhadas com alunos do 4º ano, considerando que a conceituação desses conteúdos vai além do Ensino Fundamental. Ela evidencia cinco diferentes concepções que devem ser construídas com os alunos nessa faixa etária:

- Parte-todo;
- Medida;
- Quociente;
- Razão;
- Operador.

Além de expor o que representa cada concepção, a autora elenca e analisa diferentes tipos de tarefas que podem ser produtivas para compreender cada concepção, antecipando as dificuldades normalmente encontradas em cada tipo de tarefa. Nossa breve pesquisa está circunscrita apenas à concepção parte-todo.

2. Complexidade das frações em ação

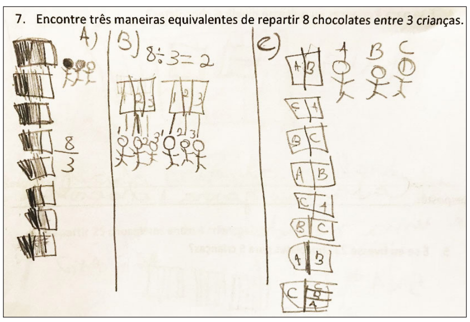
Ao propor um trabalho que não negue a complexidade de significados dos números fracionários, estamos chamando de complexo um percurso em que os alunos sejam apresentados a um meio não simplificado, com conceitos novos, desconhecidos até então, ampliando as possibilidades de relações que possam estabelecer com conhecimentos anteriores e potencializando as novas aprendizagens. Não significa que trabalharemos com todos os sentidos da fração (parte-todo, quociente, medida, razão e operador) ao mesmo tempo, nem que todos esses sentidos serão propostos aos alunos logo na introdução dos estudos dos números racionais.

a) Proposta 1: situações para seguir repartindo o resto da divisão

Escolhemos iniciar o trabalho com uma sequência de 8 problemas, traduzidos do documento curricular de Buenos Aires – apoiado na Teoria das Situações Didáticas –, que convocavam os alunos a repartirem igualmente uma quantidade, sem sobrar resto nessas divisões. Os alunos permaneceram envolvidos na resolução desses problemas durante uma aula que durou uma hora e meia.

Os problemas abordavam, de perspectivas diferentes, sempre o mesmo desafio: repartir o resto de uma determinada quantidade de chocolates por outra quantidade determinada de crianças. No primeiro problema, os alunos precisavam repartir 17 chocolates por 4 crianças. Cada criança receberia 4 chocolates inteiros e, em seguida, o resto 1 precisaria ser repartido em 4 partes. Nesse momento, os alunos perguntaram como registrar essa resposta e como nomeá-la e a professora deu essas informações: chama-se um quarto e se escreve: 1/4. Na sequência, precisaram repetir o mesmo procedimento, sempre dividindo o resto 1 em outras quantidades de crianças, e as respostas demandaram que tratassem de 1/5, 1/3 e 1/8. No problema 3, precisaram distribuir 27 chocolates para 4 crianças. Cada criança receberia 6 inteiros e a novidade é que o resto não era mais uma unidade e sim, 3 chocolates. Então, os alunos precisavam distribuir 6 chocolates e 3/4 para cada criança. E assim, as propostas foram se tornando mais complexas.

Figura 1: Exemplo de problema em que o aluno precisa dividir o resto.



No problema 7, encontramos uma interessante representação proposta pela aluna Laura[1]. O enunciado exigia três maneiras equivalentes de repartir 8 chocolates entre 3 crianças. Os alunos, portanto, precisavam buscar não apenas uma, mas três possibilidades. A aluna Laura identificou suas três respostas pelas letras A), B) e C), separando-as por um traço. Na solução A), ela desenhou os oito chocolates e as três crianças, colorindo com tons diferentes a cabeça de cada uma delas (preto, cinza e branco). Depois, dividiu cada um dos 8 chocolates em 3 partes, colorindo cada parte com um tom, fazendo corresponder as cores das partes às cores das cabeças das crianças. Chegou à conclusão de que cada criança receberia 8/3. Na solução B), Laura realizou primeiramente a divisão 8:3 e anotou o resultado 2. Abaixo do cálculo, desenhou dois chocolates (que representavam o resto da divisão, ainda que a aluna não tenha explicitado isso) e abaixo de cada um dos chocolates desenhou três crianças que, agora, são identificadas com os números 1, 2 e 3 (não mais com cores). Repartiu cada um dos chocolates em 3 partes, indicando em cada parte o número correspondente à criança que receberia essa parte. Não registrou nessa solução o resultado final que seria 2 inteiros e 2/3. Por fim, na solução C), Laura desenhou os 8 chocolates e as 3 crianças, nomeando-as agora com as letras A, B e C. Começou a repartir os chocolates pela metade, anotando a letra correspondente a cada criança em cada metade. Conseguiu fazer isso 5 vezes e sobrou uma metade que Laura dividiu novamente por 3, indicando em cada parte uma letra. Realizou, portanto, a fração da fração ou 1/3 de 1/2, ou seja 1/6. Novamente, a aluna não registrou a resposta final que seria 5/2 + 1/6.

Além de provocar nos alunos a reflexão sobre fracionar um inteiro e de sugerir que as frações também podem ser fracionadas, esse problema lança as crianças à noção de equivalência. Embora Laura não registre as frações, podemos afirmar que a aluna construiu conhecimentos novos, depois de muitas trocas entre suas colegas, aproximando-se do sentido de que existem maneiras diferentes de se repartir inteiros, quantitativamente equivalentes. Tudo isso na primeira aula de frações.

Está claro que o conceito de equivalência de frações não foi completamente apreendido apenas nessa sequência de problemas e será necessário retomá-lo em outros contextos, descontextualizá-lo e formalizá-lo.

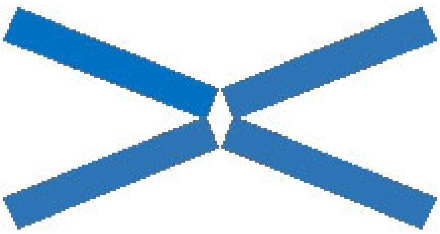
b) Proposta 2: compor uma quantidade a partir de outras expressas em frações

Na segunda aula, apresentamos uma nova sequência de problemas de composição de quantidades a partir de outras expressas em frações. A diferença em relação à primeira proposta é a de que antes os problemas pediam que se estabelecesse o valor de cada parte em relação ao inteiro. Nessa segunda proposta, o valor de cada parte já foi dado e os alunos precisam compor certa quantidade ou inteiro a partir dessa parte informada.

No primeiro problema dessa segunda aula, é apresentado um retângulo com a informação de que ele representa 1/4 do inteiro. Depois, é solicitado que o aluno desenhe o inteiro e responda se há apenas uma possibilidade. Observamos que alguns alunos mais apressados dividiram o retângulo dado em 4 partes. Nossa intervenção foi solicitar que relessem o enunciado, informando-os que haviam errado.

Outros alunos se preocuparam em medir exatamente os lados do retângulo com a régua para desenhar uma resposta. Ao concluírem que havia mais de uma possibilidade, solicitamos que desenhassem outras opções. A maioria "empilhou" quatro retângulos na mesma posição que havia sido apresentada no enunciado do problema. Outros rotacionaram o retângulo, deixando-o mais vertical e colocaram 4 retângulos iguais, lado a lado. Outros mantiveram o retângulo na mesma posição mais horizontal e agregaram outros retângulos laterais na mesma posição, produzindo um inteiro comprido.

Para que os alunos enxergassem outros inteiros compostos por essa parte dada, a professora registrou na lousa diferentes possibilidades, acrescentando uma em que os retângulos aparecem formando um "X", como na figura abaixo:



No segundo problema dessa aula, os alunos deveriam estabelecer a fração correspondente a cada parte da figura, considerando o quadrado maior como sendo o inteiro (ver Fig. 2). Primeiramente descobriram que o quadrado pequeno representava um quarto, pois quatro deles cobriam completamente o inteiro. Em seguida, perceberam que o triângulo menor representava um oitavo, pois eram necessários oito daqueles triângulos para formar o inteiro. Logo concluíram também que o triângulo maior era um quarto. O desafio para todos os grupos foi descobrir, então, quanto valia o trapézio, já que a estratégia utilizada para as outras formas, de contar quantas vezes elas cabiam no quadrado maior, não servia para ele, pois dois trapézios não cobriam o quadrado completamente e três trapézios ultrapassavam a área do quadrado. Mergulhados nesse grande desafio, observamos – conforme anuncia Brousseau (2018), a situação de ação acontecendo simultaneamente à de formulação, pois os alunos estavam, de fato, trabalhando e pensando em voz alta juntos, em um intercâmbio de hipóteses, validações e refutações.

Enrico (referindo-se ao trapézio): Um quarto, um quarto, um quarto, um quarto.

Professora (apontando para o trapézio*):* Você precisa de quatro desses para formar esse quadrado?

Arthur: Não. Vai sobrar...

Professora: Vai sobrar. Então é isso aí, vocês precisam discutir para descobrir que fração é cada uma dessas partes.

Enrico: Não é um quarto.

Arthur (apontando para o quadrado): Isso aqui é um quarto. Porque dá pra colocar quatro desses pra formar o quadrado inteiro.

Enrico (apontando para o triângulo menor): Isso aqui é um oitavo. Sabe por quê? Porque se eu pegar dois desse faz o quadrado (pequeno).

Arthur: É verdade. É um oitavo. Boa, Enrico.

Lucas (apontando para o triângulo grande)*:* Isso aqui é metade.

Enrico (apontando também para o triângulo grande*):* Isso aqui é um quarto.

Arthur: Esse aqui é um quarto???

Lucas: Não, é metade. Ah não... Depende do ângulo. Pode mudar o ângulo? Professora, pode botar de outro ângulo sem ser esse?

Professora: Pode.

Arthur (escrevendo 1/16): Mas existe esse número???

Professora: Um dezesseis avos? Sim, existe. Mas você precisa de 16 peças dessas para completar o inteiro?

Enrico: Não! Precisa só de quatro. Porque olha: tutu, tutu, tutu e tutu (desenhando com o dedo, 4 triângulos grandes).

Arthur: É verdade...

Enrico: É um quarto isso.

Arthur (apontando para o trapézio): Esse aqui é o mais estranho...

Lucas: Esse aqui não é possível formar o quadrado.

Enrico: Um de duas partes? Como é o de dois? Um dois?

Professora: Um meio. Ou uma metade. Mas essa peça é um meio?

Os três alunos: Não...

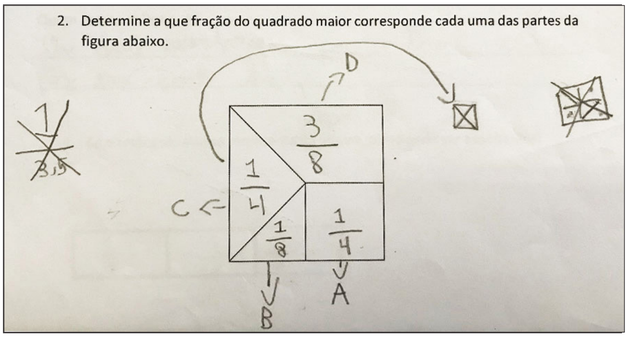
Enrico: Um terço! Olha, olha, olha. (E risca dois trapézios, sobrando o triângulo maior).

Professora: Mas essas partes não são iguais...

Depois, continuam investigando, até perceberem que o trapézio equivale ao quadrado pequeno (1/4) somado ao triângulo pequeno (1/8). Então fazem 1/4 + 1/8 = 1/12.

Outro grupo identificou que o trapézio era uma fração maior que um terço e menor que um meio. Então escreveram um terço e meio: $\frac{1}{3,5}$ (Figura 2). Depois da socialização, riscaram essa hipótese.

Figura 2: Exemplo de problema em que o aluno precisa compor uma quantidade a partir de outras expressas em fração.



Revista Veras, São Paulo, v. 10, n. 1, p. 160-188, janeiro/junho 2020.
DOI: 10.14212/veras.vol10.n1.ano2020.art393

Nenhum grupo chegou à resposta correta. Ao socializar as hipóteses na lousa, a professora evidenciou algumas conclusões parciais como: "O triângulo menor é um quarto dividido por dois. Se são necessários oito triângulos menores para cobrir o inteiro, cada triângulo menor é um oitavo. Então, um quarto dividido por dois é um oitavo ou a metade de um quarto é um oitavo".

A própria professora sugeriu nomear cada parte da figura por uma letra para facilitar a explicitação das relações entre elas. Dessa forma, o quadrado menor passa a ser A, o triângulo menor é B, o triângulo maior é C e o trapézio é D. Assim, os alunos começaram a visualizar relações entre as formas e ditavam para a professora registrar na lousa.

Theo: O A é duas vezes o B.

Professora escreve A = 2 x B.

Pedro: B + C = D

(Professora registra).

Pedro: Tem outra coisa também que eu percebi: o B + A = D

Theo: O B é tipo o centro.

Professora: É... o B está em todas.

Luiza: Então o C = 1/ 4.

Professora: Por quê?

Luiza: Porque se o B + C = D e B + A também é igual ao D, e se o B é 1/8 e o A é 1/4, o C só pode ser 1/4 também.

Dan: O B + B + B, somando vai dar a mesma figura do D. Daí vai ser 3/8.

Professora: Então o D = 1/8 + 1/8 + 1/8 = 3/8.

Na sequência dessa segunda aula, os alunos resolveram os demais problemas que tinham como principal objetivo romper com a imagem cristalizada de uma única maneira de representar frações em uma figura, seja o círculo partido em setores, seja um retângulo partido em outros retângulos.

Analisando os registros, observamos que essa discussão poderia ter sido aprofundada, por exemplo, em torno do triângulo menor

(B). Quando o aluno Theo percebe que o B se relaciona com todas as outras figuras, dizendo *"O B é tipo o centro"*, a professora poderia ter insistido nessa questão propondo aos alunos que pensassem nessa constatação do Theo: por que B é uma figura que tem relação com todas as demais? Ela é uma fração que cabe ou compõe todas as outras formas. Seria interessante, ao retomar a questão das equivalências entre frações, recuperar esse problema, destacando que, para somar frações, precisamos buscar as equivalências para operar com denominadores iguais. Nesse caso, a fração comum é o triângulo pequeno que representa 1/8. É por isso que a figura composta por um triângulo pequeno (1/8), mais um quadrado (1/4), mais um triângulo maior (1/4) e um trapézio (3/8) forma um inteiro. A soma dessas frações pode ser realizada ao transformá-las em frações equivalentes com denominador 8. Assim teríamos: $1/8 + 1/4 + 1/4 + 3/8 = 1/8 + 2/8 + 2/8 + 3/8 = 8/8$, portanto, 1 inteiro.

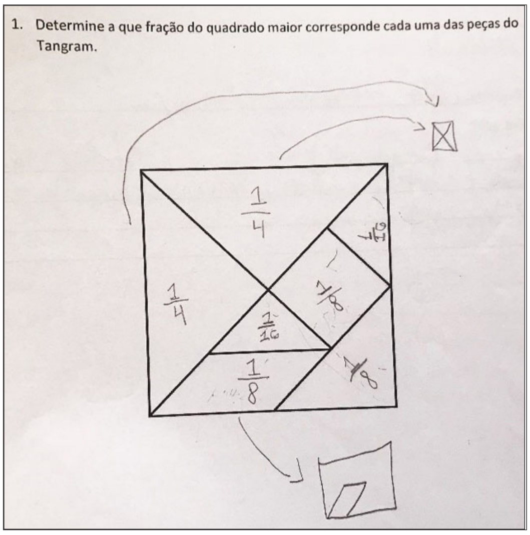
c) Proposta 3: Frações com o Tangram

Desde o início do ano, esse grupo de alunos estava habituado a trabalhar com o Tangram. Inicialmente, realizaram explorações e montagens livres. Depois vivenciaram uma atividade de geometria em que precisavam ditar a montagem de uma figura para o outro grupo. Os objetivos eram evidenciar a necessidade de diferenciar as peças, nomeá-las, observar algumas particularidades, informar se deveriam girar para a esquerda ou para a direita etc.

No terceiro trimestre, retomamos o Tangram na terceira aula de frações. A proposta era muito semelhante ao problema 2 da aula anterior e os alunos precisavam determinar a que fração do quadrado maior correspondia cada uma das peças do quebra-cabeça chinês. Os alunos novamente estavam agrupados em quartetos e a aula foi realizada em três momentos distintos.

No primeiro momento, os alunos dispunham apenas da atividade impressa em mãos, não podendo manipular o Tangram. Essa escolha buscou lançar as crianças a um exercício intelectual de antecipar e visualizar a resolução do problema, formulando hipóteses que precisariam ser verificadas posteriormente. Se, logo no início da atividade, elas tivessem acesso às peças físicas do Tangram, resolveriam o problema por meio da tentativa e do erro, sobrepondo as peças umas às outras. Com essa limitação (ou sanção) imposta pelo *milieu*, observamos os alunos fazendo gestos com os dedos, mímicas, "manipulando" peças imaginárias com as mãos, utilizando, em geral, a mesma estratégia utilizada no exercício 2 da aula anterior: encontrar quantas vezes cada peça cabe dentro do quadrado maior.

Figura 3: Atividade da terceira aula com o Tangram.



Rapidamente, concluem que o triângulo grande corresponde a 1/4:

Professora: Por que esse triângulo é um quarto?

Antonio: Porque dois já são metade do quadrado. Então, eles são um quarto.

Theo: Esses são as peças maiores. Porque se você tivesse quatro quartos já seria um inteiro.

Dan (desenhando um quadradinho repartido em quatro por um "x"): Se você fizer assim, cada parte dessa é um quarto. (Fig. 3)

Professora: Maravilha. E agora?

Antonio: Agora... Ferrou.

Em outro grupo, acompanhamos quatro meninas discutindo sobre o triangulo médio:

Gabriela: Se você pegar um desse (triângulo médio) e colocar nas pontas, já vai dar quatro.

Luiza: É um sétimo!

Gabriela: E daí dá pra colocar quatro (um em cada ponta) e mais três no meio. Então sete no total.

Luiza: Isso.

Na sequência, o primeiro grupo de meninos estava dedicado a descobrir a fração correspondente ao triângulo pequeno.

Antonio: Quatro desses pequenos formam um quarto.

Professora: Hum... E aí?

Theo (referindo-se ao triângulo pequeno): Essa é a peça principal...

Dan: O quadrado é um oitavo porque se você colocar esse triângulo pequeno pra cá, isso tudo vira um quarto. Então o quadrado é metade de um quarto, é um oitavo. Esse (triângulo pequeno) mais esse (outro triangulo pequeno) é igual a esse (o quadrado).

Antonio: Mas... então quanto vale esse (triângulo pequeno)?

Professora: Boa pergunta, quanto vale o triangulinho?

Dan: É... é... eu não sei falar. É... um quebrado em dezesseis.

Professora: Um dezesseis avos.

Dan: Um dezesseis aaavos!

Professora: Você concorda, Antônio?

Antonio: Não entendi direito...

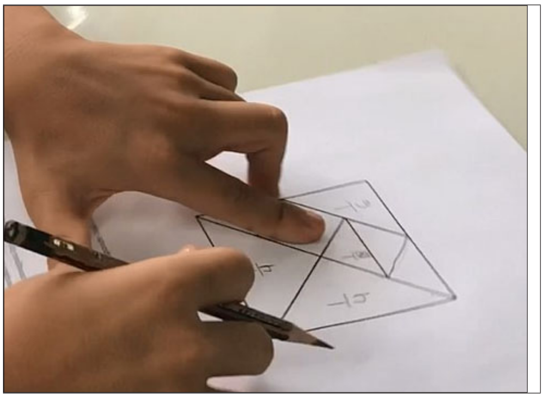
Professora: Dan, explica de novo.

(Ele explica novamente e Antonio, concorda.)

No terceiro grupo, observamos a descoberta da fração correspondente ao paralelogramo:

Arthur: É só cortar na diagonal (o paralelogramo) que aqui vai virar um triângulo e aqui (virando a folha) vai virar outro.

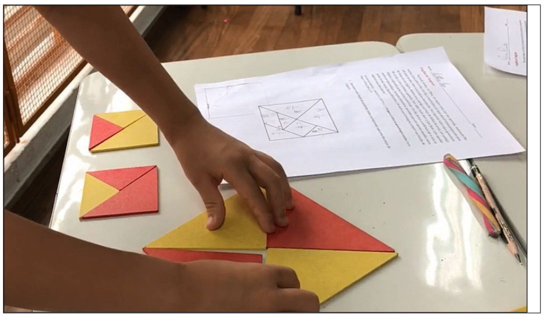
Figura 4: Divisão do paralelogramo em dois triângulos.



No segundo momento cada um dos três grupos vai à lousa registrar suas hipóteses, justificando suas descobertas. Nesse momento, a professora não faz nenhuma intervenção ou correção e todos os grupos, ao verem hipóteses diferentes, apesar de ficarem em dúvida, não abandonam a própria hipótese, confiantes de que fizeram um trabalho baseado na lógica.

Em seguida, no terceiro momento, a professora informa que vai distribuir dois conjuntos de Tangram para cada grupo verificar por si próprios suas hipóteses, manipulando as peças.

Figura 5: Aluno na situação de validação das hipóteses com o Tangram.



Nesse terceiro momento, observamos a situação de validação – descrita por Brousseau (2018) – em que os próprios alunos, em interação com o *milieu* refutam ou confirmam as hipóteses anteriormente levantadas. Por meio de sobreposição das peças, vão encontrando, uma a uma todas as relações entre as formas.

Aqui, notamos que, além de apresentar as frações sem negar sua complexidade, a tarefa possibilitou ou demandou a conexão entre conhecimentos estudados anteriormente em relação às figuras geométricas e em relação à proporcionalidade. Acreditamos que essa conexão permitiu aos alunos uma compreensão mais consistente nessa introdução às frações.

d) Sistematização parcial

Seguindo as orientações do documento curricular de Buenos Aires, na quarta aula fizemos uma pausa na construção de conhecimentos novos para proporcionar aos alunos uma recuperação das atividades realizadas, para realizarem uma sistematização parcial do que haviam aprendido até então. Em duplas, os alunos consultaram as atividades realizadas nas três aulas anteriores e listaram o que sabiam sobre frações até aquele momento. Compilamos abaixo, algumas dessas constatações, agrupadas por afinidade temática:

- Sobre o Tangram:
    - *“Tangram tem a ver com geometria mas também tem a ver com fração.”* (Dan e Antonio)
    - *“Cada peça do Tangram representa uma fração do quadro inteiro maior.”* (Laura e Victoria)
    - *“No Tangram cada peça representa uma fração do quadradão.”* (Bruno e João)
    - *“Com 16 menores peças do Tangram completamos o inteiro.”* (Bruno e João)
- Representação fracionária:
    - *“Fração é com ¼ e outros números, não assim 1,25, por exemplo.” (*Dan e Antonio)
    - *“1/x (circulando o número um, indicado com uma setinha)→1/4 isso é a quantidade de partes usadas.”* (João e Bruno)
    - *“x/3 (circulando o número 3, indicado com uma setinha) → quantas tem do inteiro.”* (João e Bruno)
    - *“A parte de baixo do símbolo da fração significa quantas partes tem no inteiro.”* (Bruno e João)
- Estratégias para resolver problemas com frações:
    - *“Desenho ajuda.”* (Bruno e João)
    - *“Colocar letra ou números nos desenhos. Exemplo: 5:2 =*

$\boxed{A}$ $\boxed{B}$ $\boxed{A}$ $\boxed{B}$ $\boxed{A \mid B}$

É igual a 2 + 1/2." (Laura e Victoria)

- *"Colorir representando cada criança.* (Laura e Victoria)

▪ Relações com o inteiro:

- *"O inteiro também pode ser representado em frações. Exemplo: 3/3 = 1 = 8/8 = 5/5."* (Laura e Victoria)

- *"Também aprendemos o que é um inteiro. Ex.: 5/5 = um inteiro porque sempre quando o número de cima é igual ao número de baixo é um inteiro."* (Gabriela e Manuela)

▪ Outras relações:

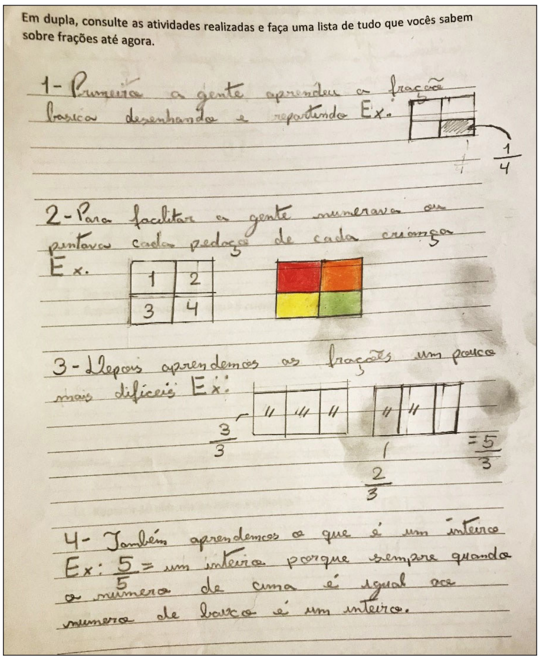
- *"Na fração o que seria o dobro vira a metade. Exemplo: a metade de 8 é 4, mas na fração a metade de 1/8 é 1/16."* (Bruno e João)

- *"Quanto maior o número de baixo, mais o inteiro é dividido em mais partes, então menores serão as partes."* (Bruno e João)

- *"5/3 é igual a 3/3 + 2/3."* (Antonio e Dan)

- *"Uma fração pode ser representada por várias frações. Exemplo: 1/2 = 2/4 = 3/6 = 4/8 = 5/10 = 6/12 = 8/16 = 9/18 = 10/20."* (Laura e Victoria)

Figura 6: Sistematização parcial feita em duplas na quarta aula sobre frações.


Em dupla, consulte as atividades realizadas e faça uma lista de tudo que vocês sabem sobre frações até agora.

1- Primeira a gente aprendeu a fração basica desenhando e repartindo Ex. $\frac{1}{4}$

2- Para facilitar a gente numerava ou pintava cada pedaço de cada criança
Ex.

1	2
3	4

3- Depois aprendemos as frações um pouco mais dificeis Ex: $\frac{3}{3}$ $\frac{2}{3}$ $= \frac{5}{3}$

4- Também aprendemos o que é um inteiro Ex: $\frac{5}{5}$ = um inteiro porque sempre quando o numero de cima é igual ao numero de baixo é um inteiro.

Revista Veras, São Paulo, v. 10, n. 1, p. 160-188, janeiro/junho 2020.
DOI: 10.14212/veras.vol10.n1.ano2020.art393

e) Avaliação individual

Depois da sistematização parcial, os 23 alunos foram submetidos a uma avaliação final com quatro problemas (ANEXO 1) que retomavam os conteúdos analisados na sequência de frações, bem como os demais aspectos trabalhados em outras áreas da matemática no trimestre – como figuras tridimensionais em geometria, multiplicação e divisão com números naturais, por exemplo. Apresentamos no quadro abaixo o desempenho geral da turma nos problemas envolvendo os números racionais na representação fracionária.

Problema	Nº de alunos que acertaram	Nº de alunos que acertaram parcialmente	Nº de alunos que erraram
1	20	0	3
2	16	1	6
3	19	2	2
4	19	0	4

A maior incidência de acertos nos faz concluir que as aprendizagens em jogo na resolução desses problemas foram alcançadas pela maioria dos alunos da turma. Chama atenção também a liberdade e diversidade de estratégias de resolução e de registro que esse tipo de proposta permitiu aos alunos, já que a maioria dos problemas eram caracterizados por perguntas mais abertas, quando comparados às propostas realizadas em anos anteriores na mesma escola, em que predominavam as lacunas para serem preenchidas de uma única maneira. Em um dos problemas da avaliação final que os alunos responderam individualmente, encontramos 6 diferentes estratégias e registros. Dos 23 alunos, 19 chegaram a resposta correta, por todos esses caminhos diferentes.

Considerações finais

Ao realizar este estudo, nosso objetivo era avaliar a viabilidade de um trabalho introdutório ao conjunto dos números racionais na representação fracionária de forma a não simplificá-lo, preservando sua complexidade inerente. Apoiamos nosso trabalho na hipótese de que atividades mais simplificadas não significam necessariamente o aprendizado mais profundo do objeto de estudo. E, portanto, dito de outra maneira, atividades mais complexas poderiam dar mais condições para uma aprendizagem também mais complexa, possibilitando maiores relações entre os diferentes saberes.

Os resultados alcançados em tão pouco tempo e evidenciados no desempenho individual dos alunos na avaliação final nos deixaram relativamente perplexas. Estávamos preparadas para intervir de maneira a ajudar mais os alunos a superarem dificuldades e isso não aconteceu. Chegamos a nos perguntar se já sabiam frações antes desse trabalho e concluímos que não. A tranquilidade e rapidez com que construíram essas complexas noções no trabalho de introdução às frações se devem, em grande parte, ao trabalho antecedente, desenvolvido ao longo de todo o ano letivo.

Tais resultados também são consequência de uma abordagem, ao longo de todo o ano letivo, de outros conteúdos matemáticos – problemas do campo multiplicativo, relações entre as operações, construção de diferentes algoritmos da multiplicação e da divisão, proporcionalidade, geometria, por exemplo – em profundidade, sem negar-lhes a inerente complexidade.

A maioria dos estudantes demonstrou apropriação do conteúdo introdutório das frações. No entanto, alguns não se apropriaram. Consideramos este um limite deste estudo: por que não aprenderam como os demais? O que deveria ser feito para que esses poucos estudantes vivenciassem novas oportunidades de aprendizagem? Esse pode ser um objeto de análise para estudos futuros.

Finalmente, os resultados alcançados refletem conquistas adquiridas por meio de um contrato didático que começou a ser construído no início do ano. Um contrato didático que valorizou o conceito de devolução, levando os alunos, progressivamente, a assumirem a responsabilidade pela construção do próprio conhecimento e sem subestimá-los. Algo que só foi possível fundamentando as relações entre os sujeitos (alunos e professora) no profundo respeito intelectual mútuo.

Revista Veras, São Paulo, v. 10, n. 1, p. 160-188, janeiro/junho 2020.
DOI: 10.14212/veras.vol10.n1.ano2020.art393

REFERÊNCIAS

BOALER, Jo. *Mentalidades Matemáticas:* estimulando o potencial dos estudantes por meio da matemática criativa, das mensagens inspiradoras e do ensino inovador. Porto Alegre: Penso, 2018.

BROUSSEAU, Guy. *Introdução ao estudo da teoria das situações didáticas:* conteúdos e métodos de ensino. São Paulo: Ática, 2008.

ITZCOVICH, Horacio. *La Matemática escolar:* las prácticas de enseñanza em el aula. Ciudad Autónoma de Buenos Aires: Aique Grupo Editor, 2018.

PARRA, Cecilia. *Matemática, fracciones y números decimales 4to grado:* apuntes para la enseñanza – 1ª ed. – Buenos Aires: Secretaria de Educación – Gobierno de la Ciudad de de Buenos Aires, 2005.

PERRIN-GLORIAN, Marie-Jeanne. From producing optimal teaching to analysing usual classroom situations. Development of a fundamental concept in the theory of didactic situations: the notion of *milieu*. The first century of the International Commission on Mathematical Instruction (1908-2008), Mar 2008, Rome, Italy. Résumé paru (abstract) page 308. hal-01660872

QUARANTA, María Emilia e WOLMAN, Susana. Discussões nas aulas de matemática: o que, para que e como se discute. In: PANIZZA, Mabel. *Ensinar Matemática na Educação Infantil e nas séries iniciais: análise e propostas.* Porto Alegre: Artmed, 2006.

SILVA, Maria José Ferreira da. *Investigando saberes de professores do Ensino Fundamental com enfoque em números fracionários para a quinta série.* (Doutorado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

ANEXO 1

Proposta 1: situações para seguir repartindo o resto da divisão.

1. Como repartir 17 chocolates entre 4 crianças de modo que cada uma receba a mesma quantidade e todo chocolate seja repartido?

2. Seguindo o problema anterior como:

   a) Repartir 21 chocolates entre 5 crianças?

   b) Repartir 10 chocolates entre 3 crianças?

   c) Repartir 1 chocolate entre 8 crianças?

   d) Repartir 25 chocolates entre 4 crianças?

3. Como dividir 27 chocolates entre 4 crianças?

4. E como dividir 6 chocolates para 4 crianças?

5. E se fossem 23 chocolates para 5 crianças?

6. Márcia tinha 3 chocolates para repartir entre 5 crianças. As seguintes formas de repartir são equivalentes?

   - Dividir cada chocolate em 5 partes iguais e dar uma parte de cada chocolate para cada criança.
   - Dividir na metade cada um dos 3 chocolates e dar uma metade para cada criança, e dividir em 5 a última metade.

   Represente em frações os dois jeitos de repartir.

7. Encontre três formas equivalentes de dividir 8 chocolates entre 3 crianças.

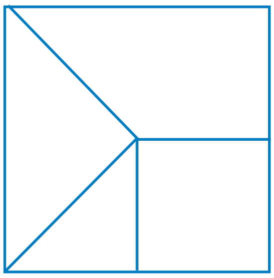
8. Larissa tinha 1 chocolate que cortou em 3 partes iguais e deu uma parte a Júlia. Luís tinha 2 chocolates iguais ao de Larissa que repartiu em partes iguais entre seus 6 amigos. Quem recebeu mais chocolate: Júlia ou cada amigo de Luís?

Proposta 2: compor uma quantidade a partir de outras expressas em frações

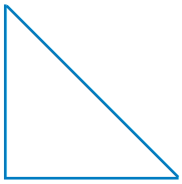
1. O retângulo abaixo representa $\frac{1}{4}$ do inteiro.

   Desenhe o inteiro. Há apenas uma possibilidade?

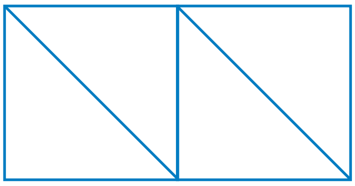
2. Determine a que fração do quadrado maior corresponde cada uma das partes da figura abaixo.



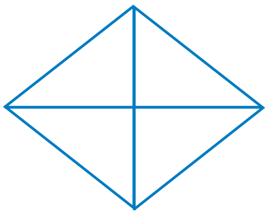
3. Se o triângulo abaixo representa $\frac{1}{4}$ de uma figura, como era a figura inteira?



   A resposta de Marcela foi:



   E a de Martin foi:



   Quem acertou? Por quê?

4. Se o retângulo abaixo representa $\frac{2}{3}$ do inteiro, como pode ser esse inteiro?

5. Em qual das figuras abaixo está pintada a quarta parte? Explique como você pensou em cada caso.

Figura 1

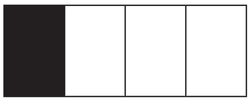


Figura 2

Figura 3

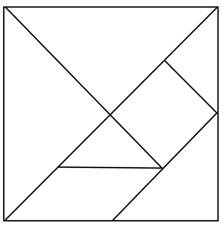
Figura 4

Proposta 3: frações no Tangram

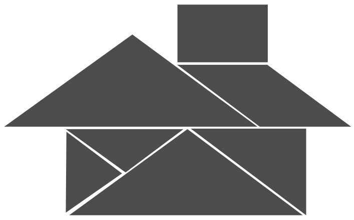
> "Há muito tempo, na China, um mestre vivia com seu aprendiz, ensinando-lhe muitas coisas sobre a vida. Um dia, o mestre disse ao rapaz que já estava preparado para sair pelo mundo e fazer suas próprias descobertas. Para registrar tudo o que aprendesse ao longo da sua viagem, deveria levar consigo um maço de folhas de arroz, um pedaço de carvão e uma cerâmica quadrada. Sem saber muito bem o que fazer com aqueles objetos, o aprendiz partiu para sua caminhada. Um dia, deixou a cerâmica cair e esta se partiu em sete pedaços. Tentando remontá-la, percebeu que com apenas aqueles cacos podia formar muitas figuras diferentes e foi assim que conseguiu cumprir sua missão de registrar suas descobertas."

Extraído de MACEDO, L.; PASSOS, N. C.; PETTY, A. L. S. Os jogos e o lúdico na aprendizagem escolar. Porto Alegre: Artmed, 2005, p. 69.

1. Determine a que fração do quadrado maior corresponde cada uma das peças do Tangram.



2. Se para pintar o paralelogramo são necessários 3 galões de tinta, quantos galões serão necessários para pintar a figura da casinha inteira?



Proposta para sistematização parcial

O que já sabemos sobre frações?

Em dupla, consulte as atividades realizadas e faça uma lista de tudo que você e seu(sua) colega sabem sobre frações até agora.

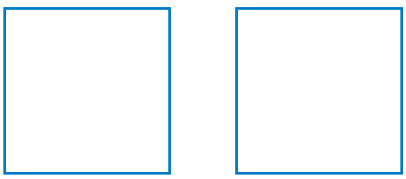
Avaliação individual

Problemas da avaliação individual:

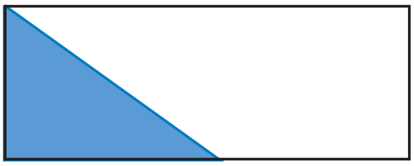
1. Paulo, Rodrigo, Camila e Fernanda querem repartir igualmente 7 chocolates, sem sobras. Represente com desenhos e responda: quanto chocolate cada um vai receber?

2. Para fazer os bolos do lanche, o Vera Cruz compra $4\frac{1}{2}$ kg de farinha, que são vendidos em pacotes de $\frac{1}{2}$ kg. Quantos pacotes a escola precisa comprar para fazer esses bolos?

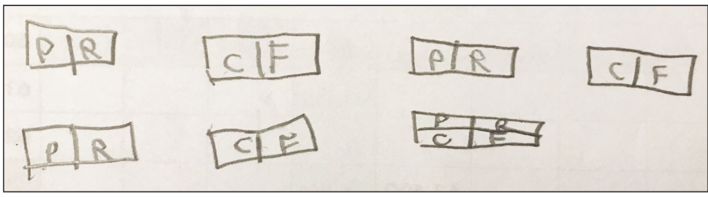
3. Em cada um desses quadrados, pinte $\frac{1}{8}$ de maneiras diferentes.

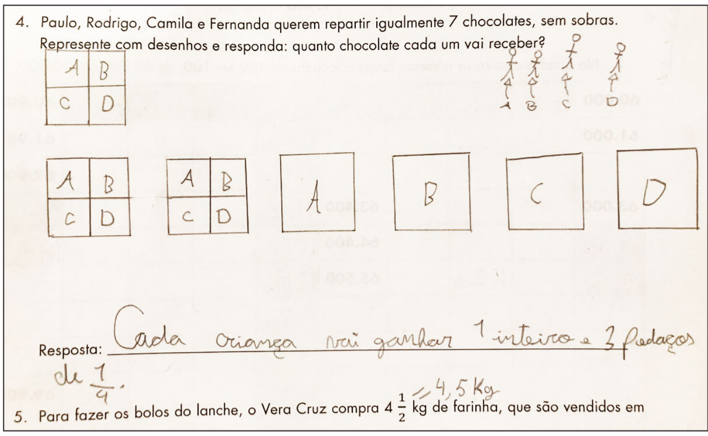


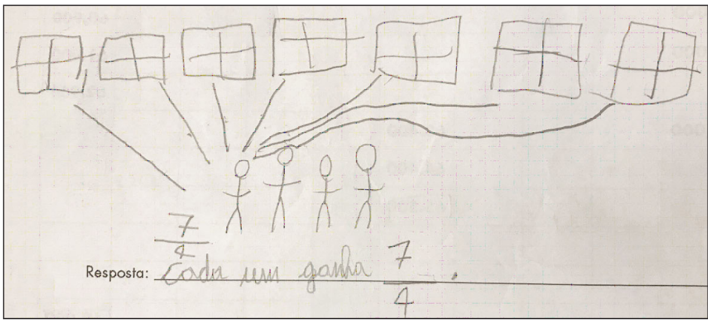
4. Que fração do inteiro representa a parte pintada?

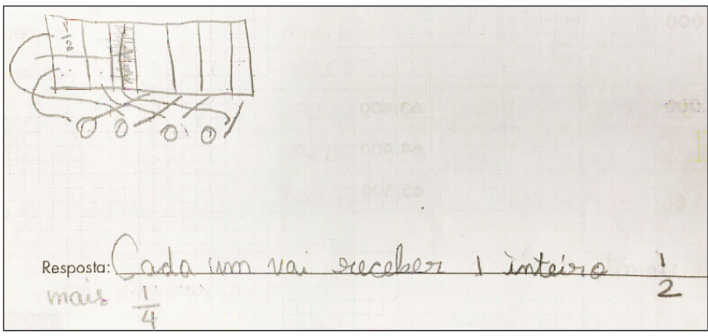


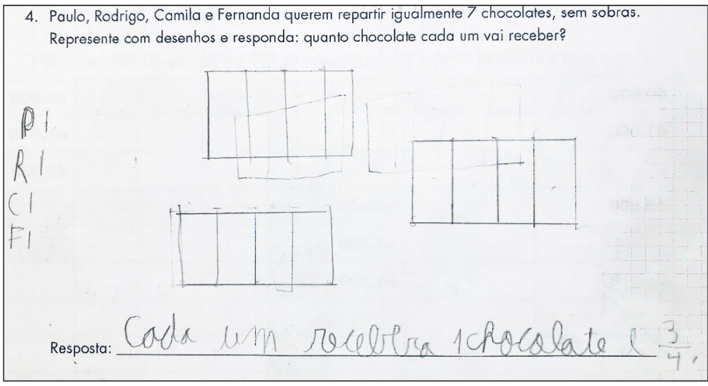
Diferentes estratégias de resolução e registro para o problema 1 (na folha das crianças esse problema aparecia como problema 4)

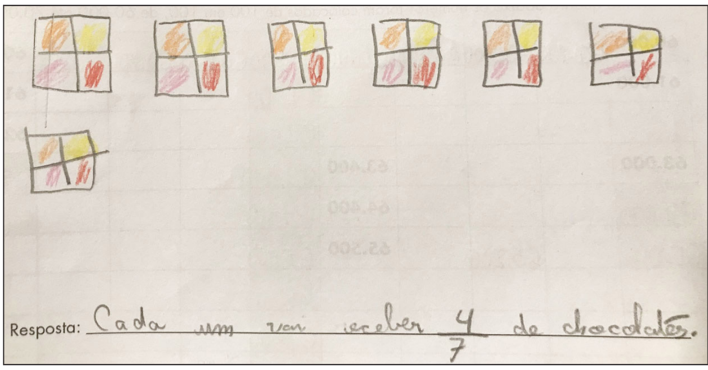


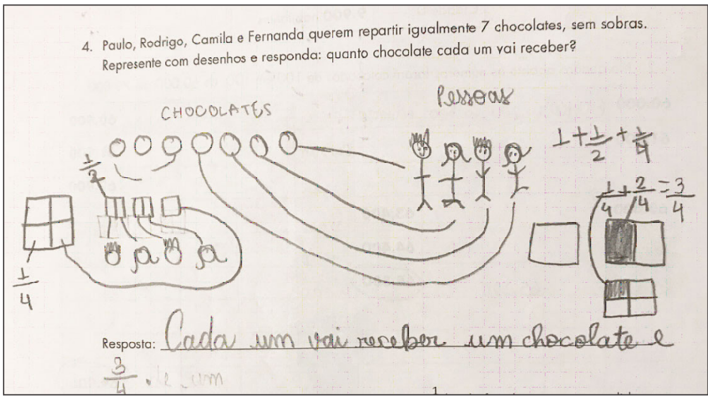


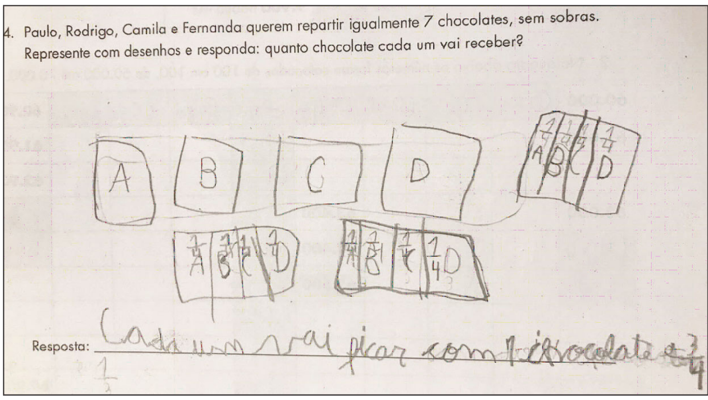












Recebido: 05/12/2019.
Aceito: 04/01/2020.