veras
revista acadêmica de Educação do Instituto Vera Cruz

ISSN 2236-5729

Números racionais no contexto das medidas

Rational numbers in measurement exploration

Alessandro Aloise de Assis, Professor e coordenador da área de matemática do Colégio ECCOS em São José dos Campos, São Paulo, pós graduando em Didática da Matemática pelo Instituto Vera Cruz. Atuante como professor de matemática desde 2015 em Fundamental II, Ensino Médio e cursos pré-vestibulares.

Contato: alemdoalfabeta@gmail.com

Sylvia de Arruda Camargo, Pedagoga formada pela Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo e Psicopedagoga e Especialista em Educação Infantil e Séries Iniciais do Ensino Fundamental I pela PUC-SP. Atualmente cursando Pós Graduação em Didática da Matemática pelo ISE Vera Cruz. Atualmente, trabalha como professora polivalente do Ensino Fundamental I do Colégio Santa Cruz.

Contato:

Viviane Azeredo Noguchi, Pedagoga com Especialização em Educação Infantil, formada pela Faculdade de Educação da Universidade Presbiteriana Mackenzie. Especialista em Educação Inclusiva pelo ISE Vera Cruz e cursando a pós de Didática da Matemática. Atualmente trabalha como professora do 2º ano da escola Vera Cruz.

Contato: vivinoguchi@gmail.com

Resumo

O trabalho tem como objetivo avaliar de que maneira a realização de medidas favorece a compreensão e o uso dos números racionais a partir de elementos visuais e problemáticas relacionadas a uma possível situação real. As atividades foram propostas a alunos de 4º ano de uma escola da rede privada em São José dos Campos (SP). A investigação

realizada durante o trabalho foi estruturada na concepção metodológica da chamada *pesquisa-ação*. As formulações e reformulações foram pautadas tanto na observação e reflexão em relação às respostas dos alunos em cada aula quanto na análise das consignas utilizadas na atividade proposta. As atividades, análises e os encaminhamentos foram pautados em pressupostos da *Teoria das Situações Didáticas*, de Guy Brousseau. O trabalho mostra que a proposta aplicada auxiliou os alunos na compreensão dos números racionais por meio das medidas.
Palavras-chave: Situações didáticas. Frações. Números racionais. Medidas. Milieu.

Abstract

This article aims to analyze the interactions among students, teacher and knowledge, during a mathematics class attended by students of the phase 2.2 of Cycle 1 of Youth and Adult Education (in Portuguese, Educação de Jovens e Adultos, EJA). Throughout the article, we present the lecture transcription of the class and we analyze the pedagogical practice in the light of the theory of didactic situations, by Guy Brousseau and in the light of the contributions of Roland Charnay on problem-solving in mathematics. It is possible to notice the role of the teacher's interventions in helping students to articulate the possible ways they have found to solve the proposed mathematical problem.
Keywords: YAE. Theory of Didactic Situations. Mathematics problem-solving. Explicitation.

Introdução

O conceito de números racionais (definidos como o conjunto de números que podem ser escritos na forma —, onde a e b são números inteiros e b ≠ 0) marca uma importante ruptura na forma como os números são tratados na escola[1]. Nos primeiros anos do Ensino Fundamental, os alunos enxergam que os números são essencialmente usados para contagem e, portanto, formam uma sequência numérica que restringe o significado à *quantidade discreta* (números cardinais). Costuma-se abordar também o uso de número como *ordem*, o que reforça a ideia de que os números vêm "um após o outro".

1. A ruptura de que falamos não envolve os números racionais negativos. Para este trabalho, o enfoque é primordialmente dos racionais positivos e escritos sob a forma de fração, ou seja, números em que a e b são números naturais, com b ≠ 0.

Ao tomar contato com números racionais, os alunos são convidados a reconstruir sua noção de número. Para citar alguns exemplos: as frações não se apresentam em sequência, como os números naturais; a multiplicação de um número racional por outro pode ter como resultado um número menor que os fatores; sua representação na forma de fração exige o uso de dois números naturais, mas eles compõem apenas um único número racional; os números podem ser descritos de pelo menos duas formas comuns e equivalentes: a forma decimal e a forma fracionária.

Os números racionais podem ser entendidos sob cinco diferentes concepções fundamentais (SILVA, 2005):

- Parte-todo
- Quociente (ou divisão)
- Razão
- Operador
- Medida (p. 117)

Para este trabalho, estamos interessados na concepção de fração[2] como *medida*. Toda medida impõe uma comparação de um objeto com uma referência: um tempo de 10 segundos implica um intervalo 10 vezes maior que um intervalo de referência de 1 segundo; ao dizer que uma tábua mede 12 metros estamos dizendo que ela é 12 vezes maior que um objeto de referência de 1 metro de comprimento. É fácil, no entanto, compararmos dois objetos de tamanhos distintos (duas canetas de diferentes comprimentos, digamos) e perceber que um não caberá necessariamente uma quantidade inteira de vezes no outro. Silva (2005) comenta que:

> [...] encontramos na gênese da numeração fracionária algumas práticas sociais, como as medidas realizadas pela determinação de unidades que permitissem quantificar a grandeza a ser medida e a comparação dessa unidade com o objeto a ser medido. (p. 60)

Dessa forma, aponta-se a medida como o cerne do conceito de fração tal como ele surge historicamente. A mesma autora, após descrever unidades de medida utilizadas por egípcios e chineses na antiguidade, menciona:

> Nota-se que o estabelecimento de unidades para medições fez emergir a criação de tabelas de conversões, tanto para as unidades e suas subunidades como para unidades diferentes, necessárias principalmente nas relações comerciais (SILVA, 2005, p. 61).

2. Devido ao foco do trabalho feito com os alunos, utilizaremos a nomenclatura de números fracionários ou frações para nos referirmos aos números racionais e suas ideias desenvolvidas nas atividades.

Gostaríamos, portanto, de avaliar de que maneira o uso das medidas favorece a compreensão dos números fracionários, essa ideia mais ampla de número que se apresenta aos alunos por volta do 4º ano e que rompe com a ideia principal de números como *quantidade*, seja tratando-se de grandezas contínuas ou grandezas discretas.

Consideramos o uso dos números fracionários como medidas de comprimento uma prática social essencial. Usamos medidas para acompanhar o crescimento das crianças e também para averiguar a quantidade de produto oferecida numa embalagem de alimento que desejamos comprar, seguimos receitas em que ingredientes vêm expressos em medidas, viajamos em estradas em que as distâncias são expressas em medidas, assim como as velocidades que devemos respeitar. As medidas apoiam nossa ação em diferentes âmbitos da vida.

Qualquer que seja a unidade de medida de referência, será sempre possível encontrar um objeto com dimensões que não poderão ser representadas por quantidades inteiras dessa unidade. As relações numéricas entre metros e centímetros, por exemplo, são enunciadas como "1 metro são 100 centímetros" ou como "1 centímetro é $\frac{1}{100}$ do metro". Não é incomum medirmos um espaço da casa em palmos de nossa própria mão para conferir se o móvel de uma loja cabe no espaço – e frequentemente esse espaço será descrito como "dez palmos e meio" ou "dez palmos e um terço". Conforme estabelecem relações matemáticas entre diferentes unidades, sejam elas convencionais (tais como metros, centímetros, milímetros, milhas) sejam unidades inventadas, como “palmos de minha mão”, é importante que os alunos amadureçam a ideia de uma entidade numérica que represente um comprimento não inteiro.

Ao trabalhar com problemas, consideramos essencial a variedade de procedimentos de resolução por parte dos estudantes. Tais procedimentos constituem-se como instrumento valioso que viabiliza, por meio de discussões previamente planejadas, o desenvolvimento dos alunos. O trabalho com medidas de comprimento também põe em jogo a relação entre as representações fracionária e decimal dos números. Dentro dessa perspectiva, pretendemos ainda com essa reflexão investigar de que maneira as atividades propostas (em particular a descrição dos enunciados) incentivam o uso dos números racionais em suas formas decimal ou fracionária.

Metodologia

Como parte do processo investigativo da prática de ensino que é objeto deste trabalho, consideramos adequada a utilização da chamada pesquisa-ação. Tripp (2005) contextualiza-a afirmando que:

> É importante que se reconheça a pesquisa-ação como um dos inúmeros tipos de investigação-ação, que é um termo genérico para qualquer processo que siga um ciclo no qual se aprimora a prática pela oscilação sistemática entre agir no campo da prática e investigar a respeito dela. (pp. 445 e 446).

Mais especificamente:

> A pesquisa-ação educacional é principalmente uma estratégia para o desenvolvimento de professores e pesquisadores de modo que eles possam utilizar suas pesquisas para aprimorar seu ensino e, em decorrência, o aprendizado de seus alunos." (p. 445)

Como destaca o autor, "*considera-se às vezes que a pesquisa-ação é ateórica*" (p. 450), de forma que o uso do termo "pesquisa" aqui é feito num sentido mais amplo e que prioriza o prático, já que *"os práticos não adotam simplesmente uma teoria 'já pronta', mas a problematizam pela aplicação"* (ELLIOT, 1994. *apud* TRIPP, 2005. p. 450).

Nossa proposta, portanto, envolve o aprimoramento da prática de ensino por meio de um ciclo iterativo: o planejamento, a ação do que foi planejado, a descrição dos efeitos da ação e a avaliação dos resultados, que vai implicar, por sua vez, um novo estágio de planejamento. Esse ciclo se repetirá de forma contínua, sempre a serviço de uma prática que, no nosso caso, envolve melhores resultados de aprendizagem.

Podemos especificar cada uma das etapas da seguinte maneira:

- **Planejamento (e replanejamento):** envolve as atividades propostas aos alunos, incluindo enunciados, desenhos, materiais a serem utilizados, agrupamentos de alunos, antecipações de dificuldades, possíveis intervenções e tempos alocados para as diversas etapas previstas.
- **Ação:** as aulas em que efetivamente se trabalham as atividades junto com os alunos.
- **Descrição e monitoramento:** fotos, filmagens, registros escritos dos alunos e uma análise posterior a cada aula

utilizando esses materiais como fonte.

- **Avaliação dos resultados:** a partir da análise, destacamos evidências que sugerem mudanças nos itens planejados, tais como reorganização do tempo, retomada de conhecimentos prévios exigidos, retirada ou inserção de materiais de trabalho e ajustes nos enunciados das atividades.

As reflexões sobre a prática, propostas pela pesquisa-ação, trazem, segundo Marcolino (2008), a oportunidade de o professor compreender o que está implícito em suas próprias ações e, a partir daí, poder analisar se elas estavam coerentes ou não com suas crenças e teorias. Tripp (2005, p. 449), citando McNiff:

> [...] diz que a pesquisa-ação implica em tomar consciência dos princípios que nos conduzem em nosso trabalho: temos de ter clareza a respeito, tanto do que estamos fazendo, quanto do porquê o estamos fazendo. (apud TRIPP, ANO, p. 449).

Ao registrar e avaliar sua própria experiência o sujeito pode reconstruir sua prática pedagógica. Ou seja, as reflexões causadas pelos processos em confronto com as teorias e práticas propiciam novos significados e, essencialmente, buscam melhores resultados de aprendizagem. Marcolino destaca que "o principal objetivo não é apenas conhecer o fenômeno, mas mudá-lo, de modo que seus resultados estejam coerentes com seu sistema apreciativo". (MARCOLINO, 2008, p. 54).

Os dados desta pesquisa foram provenientes de registros coletados no Colégio ECCOS[3], uma escola da rede particular situada em São José dos Campos (SP). A pesquisa foi feita em duas turmas de 4º ano (que chamaremos **4º M** e **4º T**) com crianças na faixa etária de 8 a 9 anos.

Para o desenvolvimento da atividade proposta, foram realizados três encontros (que chamaremos *sessões*) em dias distintos (dois com a turma do **4º M** e um com a turma do **4º T**). A escolha de duas turmas – em vez de apenas uma – foi feita considerando as adequações de agenda entre as docentes de sala (uma do **4º M** e outra do **4º T**) e os integrantes do presente trabalho. Apesar de a realização dos três encontros numa única turma ser mais interessante do ponto de vista da análise na evolução da aprendizagem, consideramos que o encontro com uma outra turma ofereceria suficientes dados para os replanejamentos, as análises e conclusões da pesquisa-ação envolvendo o objetivo do trabalho.

3. Os responsáveis pelo Colégio Eccos autorizaram a divulgação de seu nome

A participação das docentes foi mais significativa nas etapas de *ação* (aulas) e *descrição e monitoramento* (auxiliando com as filmagens, fotos e conversas orais que alimentaram o replanejamento). Na etapa de planejamento, as docentes auxiliaram significativamente com a montagem dos agrupa-mentos produtivos, que foram feitos considerando níveis complementares de compreensão dos números fracionários, tópico que, de acordo com as docentes, já havia sido abordado, com ênfase na concepção parte-todo por meio dos dispositivos gráficos disponíveis no livro-texto adotado pela escola (SMOLE, 2016. Faça matemática, 4º ano, FTD).

As atividades que propusemos exigiam comparar distintos segmentos de reta com um segmento que define uma unidade de referência. Interessa-nos, em particular, o desafio que requer dos alunos medir objetos de comprimento menor que a unidade de referência (ou maiores que a unidade, mas uma quantidade não inteira de vezes, como quando dizemos "esta televisão é 1 vez e meia maior que aquela"). Aqui também observamos uma ruptura: a comparação, por exemplo, de um objeto A de 9 cm com outro B de 3 cm é em geral descrita como: "A possui o triplo do comprimento de B"; mas o que desejamos é que os alunos sejam também capazes de articular a ideia inversa: "O objeto B possui ⅓ do comprimento do objeto A". Essa será a compreensão principal a ser desenvolvida e que solicitará, simultaneamente, o uso do conceito de medida e o manejo de números fracionários para representar objetos menores que o objeto cujo comprimento é a referência.

Os problemas apresentados foram sendo ajustados e modificados conforme a resposta dos estudantes nos levava a novas análises e considerações. Essas modificações, sempre necessárias para aperfeiçoar as propostas que fazemos aos estudantes, foram particularmente importantes uma vez que as professoras titulares não participaram diretamente do planejamento dos problemas e, portanto, não tínhamos conhecimento prévio detalhado das habilidades e nível de compreensão das crianças quanto às duas temáticas fundamentais – o conceito de medidas e o conceito de frações – e tampouco de suas habilidades de leitura e interpretação de textos – o que impactaria, como veremos, não apenas a escrita dos enunciados mas a disposição das figuras e espaços de resolução. A pesquisa-ação foi particularmente importante como estratégia de desenvolvimento da aprendizagem dos alunos por meio do aprimoramento do ensino tal como praticado ao longo das aulas.

Todos os alunos de ambas as turmas realizaram o mesmo exercício em dias distintos (com os ajustes já mencionados nos enunciados). Os momentos de *descrição* e *análise dos resultados* mostraram, como veremos a seguir, que havia espaço para ajustar a forma como as questões foram postas aos alunos. Acreditamos incentivar, assim, o entendimento que precisavam ter para interagir mais efetivamente com tais questões.

Temos duas intenções principais em torno dessa interação efetiva: 1) possibilitar que os alunos coloquem em jogo, de modo mais explícito, seus conhecimentos prévios, evidenciando mais claramente a tensão entre o desafio posto e o que já sabiam; e 2) minimizar, tanto quanto possível, a necessidade de intervenção direta do professor na interpretação do está sendo pedido, já que, uma vez bem compreendida a pergunta, a própria indagação dos alunos deve disparar desequilíbrios, assimilações e acomodações que abrangem a aprendizagem. As sequências foram pensadas de modo a permitir a construção dos saberes matemáticos dos alunos sem a interferência direta do professor, mas viabilizadas pelo que Brousseau denomina *milieu*.

A justificativa para essas duas intenções surge tanto a partir da prática pedagógica e da experiência docente dos integrantes deste trabalho quanto de aspectos teóricos que fundamentam tal prática. Referimo-nos aqui à *Teoria das Situações Didáticas* (Brousseau, 2007), e explicaremos melhor a seguir como a utilizamos.

Desenvolvimento

Brousseau se questiona inicialmente: *"Em que medida o sucesso da transmissão de conhecimentos matemáticos depende das ciências da educação, da psicologia ou da própria matemática?"* (p. 15). O autor discute, então, um ponto fundamental: *"Que condições podem ser propiciadas para que um sujeito qualquer tenha a necessidade de um conhecimento matemático determinado para tomar certas decisões?"* (p. 18). Brousseau afirma que *"um problema ou exercício não pode ser considerado mera reformulação de um conhecimento, mas um dispositivo, um meio que responde ao sujeito, segundo algumas regras"* (p. 19) e elabora algumas das questões que vão guiar diversos aspectos essenciais da TSD: *"Que jogo o sujeito deve jogar para precisar de um conhecimento determinado? Que aventura – sucessão de jogos – pode levá-lo a conceber ou adotar esse conhecimento?"* (p. 19).

É a partir daí que se vai desenvolver a ideia do milieu (meio, na tradução para o português) "como um subsistema autônomo, antagônico ao sujeito" (p. 21), que inclui o meio material – "as peças de um jogo, um desafio, um problema, inclusive um exercício, fichas" (p. 22). Esse milieu material, enquanto meio propício para o desenvolvimento adequado do aprendizado, é caracterizado, no caso específico de nosso trabalho, principalmente pelo exercício pedido aos alunos, cujo acesso é feito pela leitura e interpretação dos enunciados e pelos dados gráficos dispostos no exercício. É crucial, portanto, que os alunos percebam o que exatamente lhes está sendo pedido que façam, de modo que o meio seja antagônico, mas não hostil à sua atuação.

A inspiração da atividade proposta veio do material argentino de Matemática denominado *Fracciones y números decimales, 4º grado – Apuntes para la enseñanza.* Esse material foi elaborado pela Secretaria de Educação do Governo da Cidade de Buenos Aires e faz parte do *Plan plurianual para el mejoramiento de la enseñanza 2004 – 2007*. O material foi dirigido por Cecilia Parra (2005). Conhecido pelos integrantes do grupo, observamos que alguns exercícios ali descritos nos serviriam ao propósito de trabalhar as duas noções fundamentais: a realização de medidas e o manejo das frações para realizá-las. O objetivo deste trabalho passa, necessariamente, pela observação e análise da adequada articulação dessas duas ideias.

Escolhemos, assim, a *Actividad 3. Utilizar fracciones para medir longitudes* (PARRA, 2005, p. 27) (conforme imagem a seguir). Trata-se de cinco itens que procuram, inicialmente, fazer com que o aluno desenhe um segmento que meça a terça parte de um segmento dado, medindo 12 cm, entregue aos alunos sem indicação de comprimento. Esse segmento servirá como unidade, posteriormente, para que os alunos identifiquem que medidas possuem, em relação a essa unidade, outros segmentos de medida 2 cm, 3 cm, 6 cm, 8 cm e 15 cm. São dados sempre apenas os segmentos, sem suas medidas em centímetros.

Considerando o tempo das aulas e o número de encontros disponíveis, optamos por trabalhar com foco nos itens a) e b)[4]. Como vemos, temos no exercício as duas possibilidades de medidas fracionárias que já destacamos: quatro segmentos com medida inferior à unidade; e um segmento com medida superior à unidade, mas que não chega a ser o dobro dela.

4. Os itens c), d) e e) também fizeram parte dos exercícios propostos às crianças. Consideramos que os dados coletados não eram suficientes para fazermos análises relevantes ao propósito do trabalho, já que muitos alunos não puderam realizá-los.

UTILIZAR FRACCIONES PARA MEDIR LONGITUDES

PROBLEMAS PARA MEDIR Y REPRODUCIR

1) Reproducciones de segmentos.

a) Dibujá un segmento que mida la tercera parte de éste. (En *Páginas para el alumno* se encuentra dibujado un segmento de 12 cm de longitud que funciona como unidad.)

b) Usando el segmento anterior como unidad, indicá la medida de cada uno de estos segmentos. (En *Páginas para el alumno* están dibujados segmentos de 2 cm, 3 cm, 6 cm, 8 cm y 15 cm que deben comparar con el entero de 12 cm.)

c) Dada esta tira, que representa la unidad, construí otras cuyas longitudes sean: $\frac{1}{4}$ de la unidad, $\frac{1}{8}$ de la unidad, $\frac{5}{4}$ de la unidad, $\frac{3}{2}$ de la unidad. (En *Páginas para el alumno* se ha dibujado un segmento de 12 cm.)

d) Si esta tira representa $\frac{1}{2}$ de la unidad, ¿cuál fue la unidad utilizada? Dibujala. (En *Páginas para el alumno* se ha dibujado un segmento de 4 cm.)

e) ¿Y si representa $\frac{1}{3}$?

Na etapa de planejamento, adaptamos o enunciado para o contexto da escola. Nesse sentido, depois de traduzirmos o material argentino, fizemos ainda dois ajustes em relação ao original. Primeiro, contextualizamos as metas de compreensão e objetivos no material que seria entregue aos alunos. Depois, uma reflexão sobre o item b) nos fez supor que a utilização direta da palavra "unidade" (referindo-se à unidade de medida) poderia não ser clara para os alunos e, portanto, decidimos batizar a unidade de medida com um nome específico: *bazinga*. Dessa forma, 1 *bazinga* mediria 12 cm. Os exercícios foram organizados em dois problemas: o problema 1 pedia que desenhassem a terça parte de um segmento desenhado; e o problema 2, oferecendo um segmento medindo “1 *bazinga*”, pedia que os alunos indicassem a medida dos vários outros segmentos (medindo 2 cm, 3 cm, 6 cm, 8 cm e 15 cm) utilizando a unidade de medida *“bazinga”* como referência.

Detalharemos agora a atuação e resposta dos alunos, as mudanças feitas a cada sessão, seguindo a metodologia da *pesquisa-ação*, e as observações, análises e conclusões que pudemos construir e que retroalimentaram o processo.

Aplicação da atividade: descrição das sessões

Sessão 1: uma primeira tentativa

A primeira sessão ocorreu com os alunos do **4º T**. Eles foram divididos em pequenos grupos de dois ou três membros, organizados, como já dissemos, em agrupamentos produtivos pensados pela docente de sala. Receberam, então, a atividade numa folha de papel impressa. A orientação dada limitou-se a três itens: 1) tempo de atividade (cerca 40 minutos); 2) orientação para que os estudantes não avançassem até que todos os integrantes do grupo estivessem de acordo com a resolução de cada etapa da proposta apresentada; e 3) um pedido de que as respostas contivessem representações ou esquemas que justificassem os resultados.

Inserimos a seguir os enunciados propostos:

1. Desenhe um segmento que meça a terça parte deste.

2. O segmento abaixo vale 1 unidade de medida. Vamos inventar um nome para essa unidade de medida? Que tal *bazinga*? Certo, então o segmento abaixo mede, a partir de agora **1 (uma) bazinga**!
Sabendo disso, indique a medida de cada um destes segmentos abaixo em bazingas.

Problemas 1 e 2 propostos na sessão 1 – 4º ano T.

O primeiro ponto interessante durante a execução da atividade refere-se ao desconhecimento dos alunos quanto ao significado das palavras "terça", no contexto de "terça parte", e da palavra "meça". Houve ainda perguntas quanto ao significado de "segmento". Essa observação nos mobilizou a fazer um pequeno ajuste na segunda versão da atividade, aplicada na sessão seguinte, que descreveremos no detalhamento da sessão 2. O segundo ponto importante refere-se à dificuldade dos alunos em dar sentido à expressão "1 unidade de medida". Aparentemente, a ideia crucial de medida como comparação com uma unidade de referência não estava totalmente compreendida. Para boa parte dos alunos, portanto, o enunciado não foi claro o bastante.

A confusão quanto ao uso das palavras pode ter sido um dos fatores envolvidos nos resultados observados no problema 1: apenas dois grupos responderam a ele como esperávamos (ou seja, utilizando números fracionários). Entre os outros 12 alunos, uma dupla dividiu o segmento desenhado em três partes iguais, mas não realizou o desenho do segmento medindo a terça parte do segmento dado. Quase 60% da turma, portanto, não respondeu como prevíamos ao primeiro problema, ainda que com erros ou hipóteses iniciais equivocadas. Retomando a Teoria das Situações Didáticas, Brousseau afirma que "a aprendizagem é alcançada pela adaptação do sujeito, que assimila o meio criado por essa situação, independentemente de qualquer intervenção do professor ao longo do processo" (Brousseau, 2007, p. 22). Os dados coletados, portanto, nos serviram mais para observar de que maneira poderíamos interferir no meio (os enunciados, nesse caso) para que processos de aprendizagem de fato se pusessem em funcionamento.

O segundo ponto descrito acima, quanto à expressão "1 unidade de medida", exigiu uma pausa na aula para tentarmos retomar o conceito de medida, questionando, por exemplo, o real sentido por trás de expressões como “15 cm”, “20 m2” ou “50 km/h” e oferecendo exemplos de situações em que mediríamos a dimensão de uma mesa, digamos, usando objetos como lápis ou nossa própria mão. Com esta pausa, pretendíamos restabelecer a ideia de que as unidades de medida não são necessariamente as convencionais. Além disso, discutimos sobre as relações entre quilômetros, centímetros e metros, recorrendo, inclusive, ao radical comum “metro” em cada palavra, observando como uma unidade de referência se compara com outra unidade de referência e por que os números mudam a depender da referência utilizada. Ainda assim, quase metade da turma resolveu o segundo problema simplesmente medindo os segmentos dados em centímetros, com auxílio de uma régua, sem estabelecer relação com a unidade de referência de 1 *bazinga* (12 cm). Isso nos sugere que em próximos encontros com essa turma, se os houvesse, poderíamos, antes de prosseguir com o exercício inicial, propor atividades em que o trabalho com unidades de medida não convencionais fosse o foco, já que sem tal compreensão a articulação desejada entre medidas e frações fica, segundo observado, comprometida. Nesse encontro, um recurso interessante a ser explorado seria a roda de discussão, em que conversaríamos sobre questões como: "É possível medir com *bazingas*?", "Como poderíamos usar uma *bazinga* como unidade de medida?". Dessa forma, construiríamos coletivamente, na discussão e no intercâmbio de ideias, pontos de apoio para a interação dos estudantes com o milieu.

Apesar de não haver orientações diretas (escritas ou orais) de que a régua precisava ser utilizada, seu uso foi bastante natural. O universo social dos alunos parece indicar que segmentos dessa ordem de grandeza podem ser medidos com um instrumento conhecido como a régua. O desafio, no entanto, era relacionar segmentos diversos com um segmento com comprimento referência – a *bazinga*. O não entendimento desse pedido fez com que os alunos acima mencionados simplesmente representassem nos segmentos a reprodução de uma régua, indicando seus comprimentos em centímetros. Houve ainda o caso de uma dupla de estudantes que construiu traços similares aos encontrados numa régua comum (dividindo os milímetros e centímetros). A distância entre os traços, no entanto, aparentemente foi aleatória e sem relação com as medidas da régua ou com a atividade proposta, como se estivessem, talvez, propondo uma “nova régua”. Novamente, temos aqui evidências de que a ideia de medidas e suas unidades (e subunidades) não era, para esse grupo de alunos, sólida o bastante. Não obtivemos, portanto, a esperada utilização de números fracionários para resolver o problema posto.

Ainda sobre o segundo problema, tivemos 7 alunos que identificaram corretamente as frações correspondentes aos segmentos dados (2 cm: de *bazinga*; 3 cm: $\frac{1}{4}$ de bazinga; 6 cm: $\frac{1}{2}$ de bazinga; 8 cm: $\frac{2}{3}$ de *bazinga*). Nenhum aluno, no entanto, identificou a fração correspondente ao segmento de medida 15 cm (II IIII I) , o que nos confirma a dificuldade natural das frações impróprias, algo que será mais bem discutido na descrição da sessão 3.

Vale ainda mencionar que a detalhada descrição das metas de compreensão, escritas na forma de perguntas, causou mais confusão que clareza no sentido da atividade. Isso se deve ao fato de que os estudantes não estavam habituados a esse tipo de apresentação inicial quanto ao que é importante que compreendam, e não houve tempo hábil para trabalhar essas questões – que tampouco eram o objetivo principal da pesquisa. Dessa forma, as metas de compreensão foram retiradas nas sessões seguintes.

Sessão 2: um equívoco inesperado – e uma resposta à altura

O segundo encontro foi realizado com a turma do **4º M**. Os agrupamentos produtivos foram feitos de forma a dividir os alunos em dez duplas. As orientações dadas aos alunos seguiram o mesmo padrão das feitas na sessão 1.

Além da já mencionada alteração na descrição dos objetivos da aula, fizemos dois outros ajustes. O novo enunciado do primeiro problema foi alterado da seguinte maneira:

A. Procurou deixar mais explícito o que era o segmento de reta de 12 cm, definindo segmento como “uma linha reta com começo e fim”.

B. O espaço reservado para que o aluno desenhasse o segmento medindo a terça parte deste também ficou mais evidente.

C. Como observamos na sessão 1, a dificuldade no manejo da palavra “terça” provavelmente fez com que os alunos ignorassem a instrução ou simplesmente dividissem o segmento de 12 cm em três partes de mesmo comprimento. O verbo medir, no imperativo, e a expressão “terça parte” foram substituídos por comandos diferentes: utilizamos “$\frac{1}{3}$” em vez de “terça parte”, dado que as informações passadas pela professora indicavam que eles tinham familiaridade com a ideia e a representação de frações tais como $\frac{1}{3}$. Considerando a importância do uso do vocabulário adequado, introduzimos uma sentença com um espaço para completar que os induzisse a pensar na expressão “terça parte”, assim como usariam a expressão "metade" se o pedido fosse relacionado a uma medida de ½ do segmento original.

1. Abaixo podemos ver um *segmento de reta*, que é uma linha reta com começo e fim.

Você e seu par devem agora desenhar, no espaço abaixo, um novo segmento (ou seja, uma nova linha reta), que possua $\frac{1}{3}$ do tamanho do segmento acima.

Novo problema 1 proposto na sessão 2 – 4º ano M.

Um ajuste ainda mais significativo foi realizado no segundo problema. Na tentativa de tornar mais clara a ideia de que uma unidade de medida é a base de referência para medir outros objetos, criamos um cenário fictício que se passa em uma ilha onde as pessoas não usam as unidades de medidas convencionais (metros, centímetros, milímetros) para medir. A ideia era fazer com que os alunos mergulhassem nesse cenário de forma a evitar que o professor desse instruções diretas do significado do conceito de medida, parte importante para a construção do milieu: a lógica interna do cenário fictício deve viabilizar a aventura, o jogo que o sujeito deve jogar para precisar do conhecimento desejado. A própria situação evidenciava que para esse povo fictício, era muito natural utilizar *bazingas* em vez de centímetros. A proposta, então, era que os alunos ajudassem um cientista a medir comprimentos de certos segmentos em *bazingas*. O enunciado também procurou esclarecer que algumas das linhas (palavra que substituiu segmento nessa versão) a serem medidas eram maiores e outras menores que 1 *bazinga*.

Para tornar a descrição mais clara, inseriu-se um exemplo considerado conhecido no universo social dos estudantes: "Por exemplo, uma porta pode ter cerca de 20 *bazingas* de altura. Um tênis de adulto deve medir umas 2,5 *bazingas*". Os exemplos foram criados com números reais, respeitando-se o fato de que uma *bazinga* mede 12 cm. Esses exemplos provocaram impacto direto nas formas como os alunos resolveram as situações postas, mas, antes de comentar sobre isso, falemos sobre um interessante equívoco cometido.

2. Na ilha de Macondo, ocorre algo interessante: lá não se usam *centímetros*, *milímetros* nem *metros* para medir o tamanho das coisas. Os habitantes de lá utilizam a **bazinga** como unidade de medida. Por exemplo: uma porta pode ter cerca de 20 bazingas de altura. Um tênis de adulto deve medir umas 2,5 bazingas.

Para saber quanto vale 1 bazinga, pedimos ajuda ao cacique da ilha. Ele desenhou o segmento de reta abaixo:

Um cientista brasileiro precisa de ajuda para saber quantas bazingas medem os segmentos abaixo. Ele está tentando entender como faria para descrever os tamanhos dessas linhas, pois algumas são maiores e outras menores que 1 bazinga.

Ajude o cientista a responder à pergunta: quanto mede cada segmento abaixo usando a unidade de medida **bazinga**? Ajude-o também a entender como você pensou para chegar a esta resposta, mostrando seu pensamento com clareza.

Novo problema 2 proposto na sessão 2 – 4º ano M.

O material impresso para a sessão 1 apresentou todos os comprimentos com perfeição. O segmento de 1 *bazinga*, ao ser medido no papel impresso, tinha exatamente 12 cm, assim como todos os outros segmentos mediam o que esperávamos que medissem. No material impresso para a sessão 2, no entan-to, por um erro de impressão o segmento que deveria ser de 12 cm acabou medindo, na realidade, cerca 11,5 cm. O uso da régua, ocorrido na sessão 1 e esperado na sessão 2, acabou se tornando pouco importante para responder à problemática posta.

A saída encontrada pelos alunos diante desse desafio pode ser dividida em duas ações distintas: uma reproduzida no papel e outra refletida na busca de objetos reais e na interpretação do enunciado, mais especificamente dos exemplos dados. No primeiro caso, observamos que cerca de 80% da turma recorreu apenas a uma aproximação visual para dividir o segmento de 1 *bazinga* em três partes de mais ou menos o mesmo comprimento. Considerando que não foram oferecidos materiais tais como tiras de papel ou pedaços de barbante, julgamos que, a princípio, o uso da aproximação visual foi bastante satisfatório, ainda que não tenha provocado o desequilíbrio desejado. O uso de material manipulável não foi previsto porque, ao planejar e escolher a *bazinga* com medida 12 cm, acreditamos que os alunos teriam condições de subdividi-la em subunidades que permitiriam a representação dos segmentos menores utilizando os números fracionários.

Quanto ao segundo problema, seis duplas de alunos (60% da turma, portanto) utilizaram-se de números na forma decimal para representar as medidas dos segmentos pedidos em relação à *bazinga* no segundo problema. Além disso, metade da turma realizou a medida do segmento de 1 *bazinga* concluindo que media 11,5 cm (ou, em um dos casos "11 cm e meio"), marcando o valor sobre o segmento. O uso de números na forma decimal provavelmente foi induzido pelo exemplo do tênis no enunciado ("medindo 2,5 *bazingas*").

Curiosamente, durante a aula, grupos de alunos consultaram os professores para que pudessem realizar medidas em portas dentro e fora da sala de aula. Reproduzimos a seguir uma conversa com alunos que chegaram à conclusão de que uma *bazinga* deve medir 12,5 cm, além de uma foto tirada no momento.

"– Uma *bazinga* é 12,5 cm.

– Como é que vocês concluíram isso?

– A gente mediu a porta e deu 250 cm. Aí a gente dividiu por 20, que são 20 *bazinga*s igual a uma porta. Aí deu 12,5 [mostrando o resultado numa calculadora].

– Mas ele tinha dito o que era uma *bazinga* ali [apontando para o enunciado].

– Que era uma unidade de medida.

– Mas o que ele disse aqui na última frase?

– [Citando o enunciado] *Para saber quanto vale 1 bazinga, pedimos ajuda ao cacique da ilha. Ele desenhou o segmento de reta abaixo*. [Pensa um pouco]. Então é 11.5 uma *bazinga*?

– E aí? É 11,5 ou é 12,5?

– Agora *bugou* o nosso pensamento."

Após o encerramento da aula, um grupo media uma das portas da sala de aula com régua. Reproduzimos a seguir a conversa com os estudantes:

"– O que vocês estão fazendo aí?

– Medindo a porta.

– Por que vocês estão medindo a porta?

– Porque no exercício falava que a porta media mais ou menos 20 *bazingas*.

Foto 1: Alunas fazendo a medida da porta da sala de aula com régua."

Essa mobilização dos alunos nos parece muito reveladora. Observamos como os estudantes recorrem a objetos de uso social com o objetivo de encontrarem saídas para o problema enfrentado. Podemos relacionar esse momento com aspectos teóricos utilizados no trabalho.

Segundo Brousseau (2007), as situações didáticas envolvem situações de ação, formulação, validação, que se retroalimentam, numa relação dialética, e momentos de institucionalização, nos quais o professor estabelece relações entre o conhecimento produzido pelos alunos e o saber teórico do campo de conhecimento envolvido. Nessas situações, o aluno pode desenvolver novos conhecimentos e saberes a partir de suas experiências e da interação com o *milieu*.

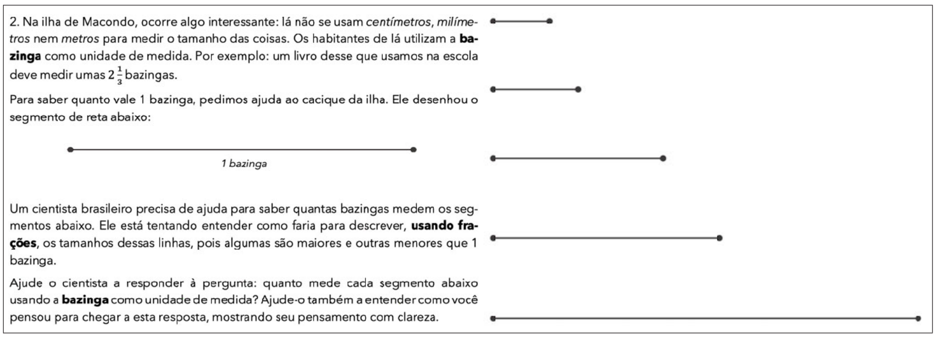
Nossa expectativa inicial era que os alunos interpretassem o desenho do segmento e utilizassem seu comprimento no papel para estabelecer a unidade de medida. Essa era, a princípio, a informação primordial (geral), mas ela acabou competindo com a informação particular dos exemplos, que foram feitos na tentativa de elucidar o uso da *bazinga* como unidade de medida tal como metro ou centímetro. Diante da dificuldade de lidar com a *bazinga* apenas por observação do desenho, alguns alunos decidiram atuar usando outros dados do enunciado e foram, efetivamente, medir a porta para formular uma conversão com uma unidade de medida conhecida (os centímetros), concluindo que a 1 *bazinga* correspondem 12,5 cm. Mas eles haviam feito o mesmo em relação ao segmento: mediram-no e concluíram que a 1 *bazinga* correspondem 11,5 cm. Quando o professor retoma o enunciado, convida a uma reflexão que procure validar (ou descartar) as conclusões a que chegaram, o que é manifestado pela expressão *"Agora bugou o nosso pensamento"*.

As discussões que aconteceram entre os integrantes dos agrupamentos podem ser definidas, segundo a Teoria das Situações Didáticas, como parte de situações de ação e validação, pois possibilitam a reflexão, argumentação, replanejamento de estratégias e a simulação de tentativas para explorar as novas hipóteses. Nesse sentido, como comentamos anteriormente, o exercício escolhido, enquanto parte do *milieu*, foi capaz de criar a necessidade do ato de medir para auxiliar na resolução do problema proposto – ainda que alguns alunos tenham recorrido a ações distintas (medir a porta e medir o segmento, levando-os a conclusões contraditórias), induzidos pelo enunciado.

O meio por si só, no entanto, não é suficiente para que ocorra a construção de novos conhecimentos. É necessário que o professor observe atentamente as interações dos estudantes com o meio (os exercícios e o contexto em que foi aplicado) e realize as intervenções adequadas, para que seus alunos possam avançar. Daí os encaminhamentos na sessão 3.

Sessão 3: o último encontro

A terceira sessão foi aplicada novamente na turma do **4º M**. Precisávamos, por um lado, reconduzir a atividade com a medida correta de 12 cm para o segmento de 1 *bazinga* no material impresso. Por outro lado, gostaríamos de tornar ainda mais evidente nas orientações escritas que o segmento de referência dado era, de fato, o que definia a medida de 1 *bazinga*. Para isso, marcamos o início e o fim do segmento de reta com um ponto destacado e escrevemos bem abaixo do segmento: 1 *bazinga* (ver abaixo). Fizemos o mesmo em relação aos segmentos de 2 cm, 3 cm, 6 cm, 8 cm e 15 cm. Também tomamos o cuidado de substituir o exemplo anterior (envolvendo o tênis) utilizando números mistos em vez de representações decimais: "*um livro deve medir umas 2 $\frac{1}{3}$ bazingas*". Ainda procurando incentivar o uso de frações nas medidas e não números decimais, orientamos por escrito que os alunos deveriam ajudar o cientista de forma específica: usando frações para descrever os comprimentos das linhas.



2. Na ilha de Macondo, ocorre algo interessante: lá não se usam *centímetros*, *milímetros* nem *metros* para medir o tamanho das coisas. Os habitantes de lá utilizam a **bazinga** como unidade de medida. Por exemplo: um livro desse que usamos na escola deve medir umas $2\frac{1}{3}$ bazingas.

Para saber quanto vale 1 bazinga, pedimos ajuda ao cacique da ilha. Ele desenhou o segmento de reta abaixo:

1 bazinga

Um cientista brasileiro precisa de ajuda para saber quantas bazingas medem os segmentos abaixo. Ele está tentando entender como faria para descrever, **usando frações**, os tamanhos dessas linhas, pois algumas são maiores e outras menores que 1 bazinga.

Ajude o cientista a responder à pergunta: quanto mede cada segmento abaixo usando a **bazinga** como unidade de medida? Ajude-o também a entender como você pensou para chegar a esta resposta, mostrando seu pensamento com clareza.

Novo problema 2 proposto na sessão 3 – 4º ano M.

A aula foi iniciada esclarecendo o problema com o segmento de reta medindo 1 *bazinga*. Foi mencionado apenas que o comprimento sofreu um ajuste menor e que eles poderiam novamente fazer uso dos instrumentos utilizados na aula anterior, mas além disso também foram oferecidos barbantes e tiras de papel medindo exatamente 1 *bazinga* (12 cm). A expectativa era que os alunos dispusessem de recursos variados para realizar os desenhos e representações numéricas pedidas. Ou seja, interferimos no meio de forma a torná-lo mais acessível e apropriado aos objetivos de aprendizagem. Analisemos um pouco dos resultados em cada atividade proposta.

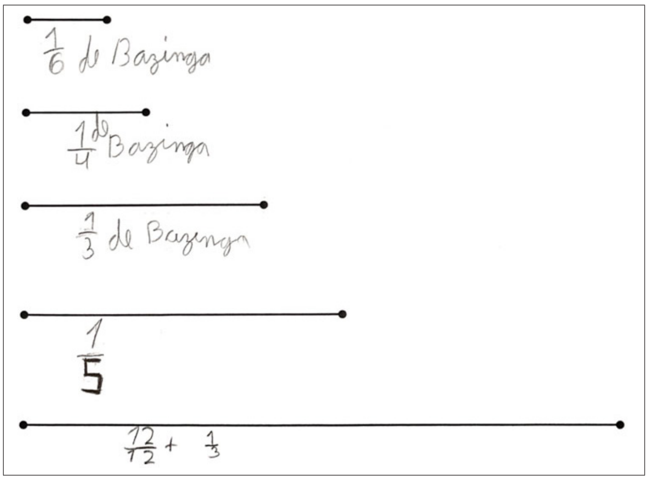
Na atividade 1, tivemos três duplas apresentando adequadamente o segmento medindo ⅓ de *bazinga* (ou seja, 4 cm). Outros dois grupos desenharam um segmento medindo apenas 3 cm. Como estes alunos não produziram registros escritos que explicassem o desenho, podemos supor que a fração ⅓ pode tê-los induzido a pensar em 3 cm. Um grupo fez o desenho de uma reta medindo 1 *bazinga*, dividindo-a em três partes, o que parece revelar o conhecimento matemático pedido, mas alguma dificuldade em interpretar a instrução precisa do enunciado. Por último, um dos grupos dividiu a reta em quatro partes, mas, ao descrever a frase, completou com “terça parte” no espaço em branco. Nesses três últimos casos, uma nova exploração seria necessária para uma conclusão mais justa.

Na atividade 2, vamos destacar algumas soluções interessantes e pontuar dificuldades que podem ser bastante reveladoras da complexidade exigida no uso dos números racionais. Vejamos a seguir o primeiro caso.[5]

5. As imagens estão fora de proporção.

DOI: 10.14212/veras.vol10.n1.ano2020.art389

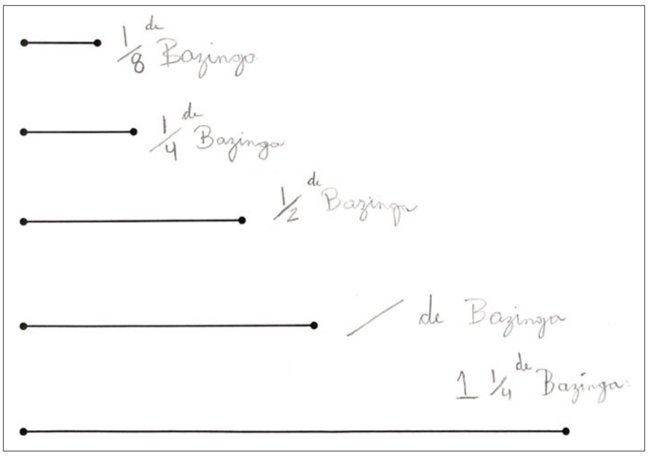
Figura 1: Resolução da atividade 2 por uma das duplas de alunos.



Observamos aqui que os alunos fizeram diversas marcações no segmento de 1 *bazinga* e foram capazes, assim, de descrever corretamente os três primeiros segmentos em termos de frações. Os dois últimos segmentos, no entanto, são mais desafiadores. Ainda assim, é interessante observar a descrição de $\frac{12}{12} + \frac{1}{3}$, que é razoavelmente próxima de uma possível resposta esperada, que seria: $\frac{2}{2} + \frac{1}{4}$, o que pode indicar apenas um equívoco menor, sem relação com a compreensão matemática da representação. Vale apontar também que nos três primeiros segmentos, os alunos descrevem, além da fração, a expressão *"de bazinga"*, o que não fazem nos segmentos seguintes. Ao escrever "$\frac{1}{5}$ ᒣᒣᒥᒥᒥᒥᒥᒥᒥ" ou "$\frac{1}{4}$ ᒣᒣᒥᒥᒥᒥᒥᒥᒥ", os alunos evidenciam a compreensão da relação do segmento desenhado com a unidade *bazinga*. Curiosamente, nos segmentos onde a fração está equivocada, a expressão *"de bazinga"* não aparece.

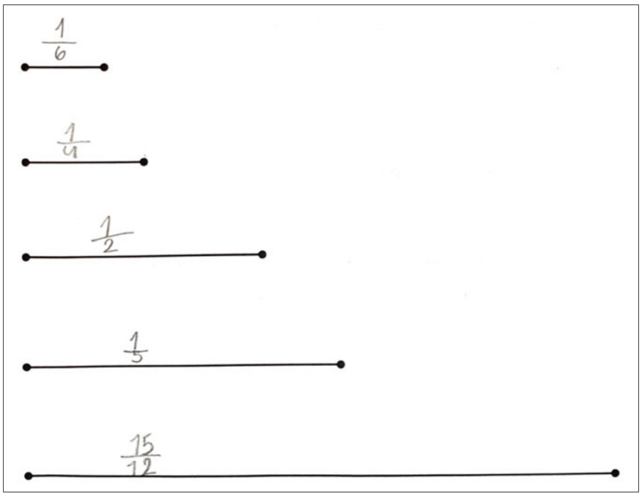
Vejamos mais um exemplo:

Figura 2: Resolução da atividade 2 feita por uma outra dupla de alunos.



Na resolução da Fig. 2, já é possível observar que o uso da expressão “de *bazinga*” foi feita em todos os segmentos. À exceção do penúltimo, todos estão numericamente corretos. Chama a atenção o uso do número misto no último segmento, numa representação mais formal que a do grupo anterior. Vejamos mais uma resolução:

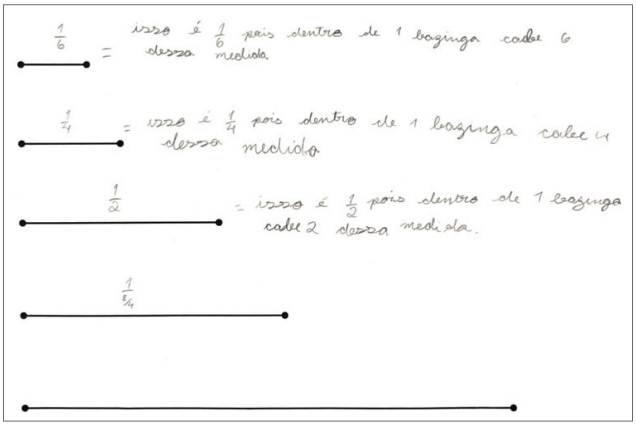
Figura 3: Resolução da atividade 2 feita por uma terceira dupla.



Observemos agora duas diferenças em relação às produções anteriores. Primeiro, apesar de todas as frações estarem numericamente corretas (exceto a penúltima), não há o uso da expressão “de *bazinga*” ao lado delas. Também notamos o uso de uma fração imprópria para representar a medida do último segmento.

A resolução a seguir chama a atenção por conter uma descrição de por que a fração inserida de fato descreve a medida pedida:

Figura 4: Resolução da atividade 2 com justificativas.

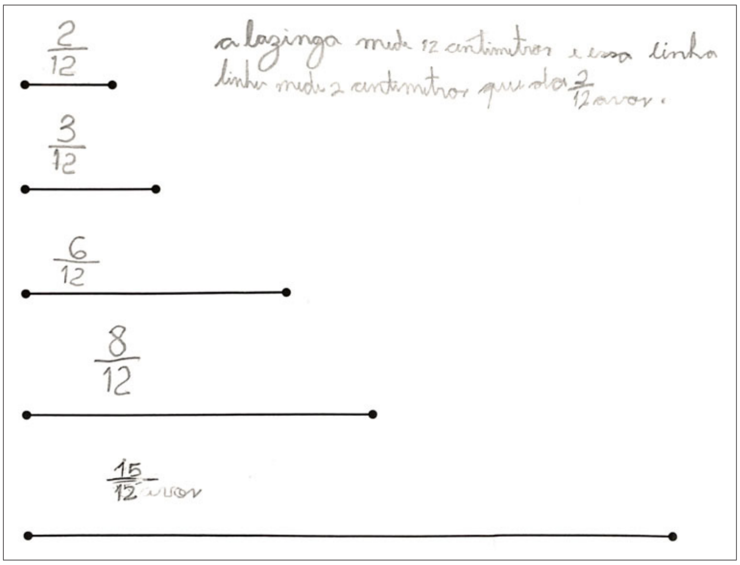


Revista Veras, São Paulo, v. 10, n. 1, p. 79-104, janeiro/junho 2020.
DOI: 10.14212/veras.vol10.n1.ano2020.art389

Todas os segmentos em que cabe uma quantidade inteira de vezes no segmento que mede 1 *bazinga* tiveram suas medidas corretamente representadas na forma de frações. Os dois últimos segmentos, no entanto, não cabem um número inteiro de vezes na unidade. A estratégia usada nos três primeiros casos, portanto, se mostrou insuficiente para resolver os problemas seguintes.

Uma das duplas foi capaz de lidar com todos os segmentos e suas representações fracionárias utilizando uma mesma estrutura de pensamento:

Figura 5: Resolução da atividade 2 com justificativas.



Vemos que os alunos utilizam o denominador 12 em todos os casos. Essa é uma estrutura de pensamento possivelmente (mas não necessariamente) emprestada da concepção parte-todo das frações, onde o 12 representaria o todo. Valeria a pena uma exploração mais profunda com esse grupo em particular, no sentido de investigarmos como a ideia de medidas pode auxiliar a compreensão de frações impróprias: ou seja, quando a “parte” é maior que o “todo”. A descrição feita no primeiro segmento sugere uma lógica de medir o todo (12 cm) e colocá-lo no denominador; depois medir o segmento dado (2 cm, 3 cm, 6 cm, 8 cm e 15 cm) e inseri-lo no numerador. Um outro momento com esse grupo nos possibilitaria relacionar essa lógica de pensamento pura e simples com a compreensão de seus significados, explorando, por exemplo, as frações em suas formas simplificadas e o sentido de uma fração com o numerador maior que o denominador.

A partir dessas resoluções, nota-se que dois aspectos importantes do uso de frações merecem especial atenção tanto no planejamento das atividades quanto ao longo do desenvolvimento de sua compreensão por parte dos alunos:

1. Quando as medidas não cabem um número inteiro de vezes no segmento (caso do segmento de 8 cm), é preciso recorrer a outros instrumentos de pensamento. Numa próxima atividade, os alunos poderiam ser incentivados a pensar, por exemplo, que esse segmento pode ser visto como a junção do 1º e do 3º segmentos; ou ainda podem ser convidados a refletir de que maneira podemos subdividir a *bazinga* e o segmento de 8 cm de forma a possibilitar o cruzamento de informações: por exemplo, dividir 12 cm em 6 blocos de 2 cm; e dividir 8 cm em 4 blocos de 2 cm, percebendo, assim, que há uma relação de 4 para 6 entre os dois segmentos.

2. Quando o segmento dado é maior que a unidade, entramos no caso das frações impróprias. Poderíamos explorar com os alunos a ideia de que segmentos podem ser o dobro, o triplo ou quantidades inteiras de um segmento dado (no caso, a *bazinga*). Depois, verificar que é possível que um segmento seja maior que a unidade e, ao mesmo tempo, não uma quantidade inteira de vezes a unidade. Dessa forma, precisa unir conhecimentos e estruturas de pensamento já disponíveis para formar um tipo especial de fração que representa situações como as do 5º segmento da atividade 2.

Um último ponto interessante no desenvolvimento dessa sessão foi a forma como alguns grupos se reorganizaram. Duas das duplas naturalmente resolveram se juntar em grupos de quatro. Ao serem questionados quanto ao motivo dessa reorganização, comentaram: "É porque eu posso ter uma ideia, ele pode ter outra ideia [...] e aí a gente trabalhar melhor". Esse reagrupamento pode se encaixar, com alguns ajustes na intencionalidade da atividade, na ideia de *situação de formulação e validação*, de Brousseau (2007): as soluções formuladas pelos alunos são confrontadas umas com as outras e é possível, assim, comparar ideias e encontrar pontos divergentes. Para tornar esse contexto de validação parte integrante da atividade, precisaríamos, em uma próxima utilização desta, fazer com que o *milieu* induzisse os alunos a comparar as propostas de solução e encontrar maneiras de validar ou descartar tais propostas.

Considerações finais

Este trabalho é o resultado da pesquisa feita com ênfase nos processos de aprendizagem da construção da concepção de frações como medida e nos processos reflexivos do professor em busca de estratégias ajustadas.

Constatamos em algumas produções que o elemento comparativo, característico das medidas, foi utilizado como recurso de compreensão de forma bastante evidente. Isso fica particularmente claro nas resoluções expostas nas figuras 4 e 5, mostradas anteriormente, mas também é possível observar como o uso da régua, junto aos elementos visuais oferecidos (as linhas), foi utilizado por grande parte dos grupos de alunos tanto na medida de 1 *bazinga* quanto nos segmentos dados e que deveriam ser comparados. Isso nos sugere que a proposta de “comparar comprimentos” e expressá-los um em relação a outro pode ser fonte significativa de relações conceituais que exijam os números racionais para serem bem estabelecidas. Ainda que sejam necessárias mais explorações para determinar conclusões mais detalhadas, o uso de expressões como “$\frac{1}{3}$ de bazinga” reforça essa leitura.

Também observamos como exemplos dados nos enunciados e suas formas específicas induzem os alunos a utilizarem os números nas formas decimal e fracionária, como se nota claramente nas sessões em que os exemplos utilizados eram fracionários ou decimais, levando os alunos a descreverem numericamente os segmentos utilizando os exemplos como referência de forma.

Destacamos que as reflexões feitas e discutidas entre os membros da equipe entre cada uma das sessões aplicadas foram de extrema relevância, possibilitando o aprimoramento da sequência proposta e o planejamento e implementação de futuras ações. A reação e resposta dos alunos diante de determinadas situações nem sempre podem ser previstam, o que reforça a importância não apenas de um planejamento cuidadoso, mas a necessidade de analisar resultados, equívocos comuns e dificuldades recorrentes para que se possa avaliar de forma mais específica os aspectos do conhecimento matemático em jogo, isolando-os de complicações paralelas (como interpretação de textos e imagens, como observamos na sessão 1).

Foi possível observar também que, segundo a Teoria das Situações Didáticas, os erros cometidos pelos alunos, quando identificados pelo professor, são elementos preciosos para a reflexão e elaboração de novas situações que possam favorecer a construção da aprendizagem por parte do aluno. Nesse contexto, o professor não é, de forma alguma, aquele que comunica, mas sim quem apresenta um problema que desencadeia a busca do saber por parte do aluno.

Por fim, foi interessante perceber que as interações sociais entre os alunos, professores e conhecimentos matemáticos estão presentes em toda a sequência. O professor conseguiu criar na sala de aula um ambiente favorável à troca de saberes, possibilitando o surgimento de uma "comunidade de matemáticos". O conhecimento é apresentado como algo vivo, dotado de sentido, e a aprendizagem é muito mais do que uma simples comunicação de informações.

REFERÊNCIAS

ARGENTINA. Secretaría de Educación - Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires. *Matemática, fracciones y números decimales* 4to grado: apuntes para la enseñanza. Dirigido por Cecilia Parra Buenos Aires. 2005. 40 p.

BROUSSEAU, G. *Iniciación al estúdio de la teoría de las situaciones didácticas.* 1ª ed. Buenos Aires: Libros del Zorzal, 2007. 128 p.

KRAFTA, L.; FREITAS, H.; MARTENS, C.D.P.; ANDRES, R. (2007) *O método da pesquisa-ação: um estudo em uma empresa de coleta e análise de dados.* Revista Quanti & Quali. Disponível em: http://www.faccat.br/download/pdf/posgraduacao/profaberenice/09pesquisa_acao_2009_3.pdf. Acesso em: 21 mar. 2020.

MARCOLINO, Taís Quevedo; MIZUKAMI, Maria da Graça Nicolletti. *Narrativas, processos reflexivos e prática profissional:* apontamentos para pesquisa e formação. Interface (Botucatu) [online]. Botucatu, vol.12, n.26, pp. 541-547, jul./set. 2008. Disponível em: https://doi.org/10.1590/S1414-32832008000300007. Acesso em: 21 mar. 2020.

QUARANTANA, Maria Emilia; WOLMAN, Susana. Discussões nas aulas de matemática: o que, para que e como se discute. In: PANIZZA, Mabel (Org.). *Ensinar Matemática na Educação Infantil e nas Séries Iniciais:* Análise e Propostas. Porto Alegre: Artmed, 2006, 192 p.

SILVA, Maria José Ferreira da. *Investigando saberes de professores do Ensino Fundamental com enfoque em números fracionários para a quinta série*. Tese (doutorado em Educação Matemática). PUC/SP, São Paulo, Brasil. 2005, 301 f.

TRIPP, David. *Pesquisa ação:* uma introdução metodológica. In Educação e pesquisa. Tradução de Lólio Lourenço de Oliveira. São Paulo, Brasil. 2005. v. 31, n. 3, pp. 443-466.

Recebido em: 16/06/2020.
Aceito em: 16/07/2020.