veras
revista acadêmica de Educação do Instituto Vera Cruz

ISSN 2236-5729

A construção da ideia de números racionais a partir da divisão contínua do resto

The construction of the idea of rational numbers from the continuous division of the remainder

Alexandra Sumadossi Cunha, graduada em Letras pela Universidade Presbiteriana Mackenzie, em Pedagogia pela Universidade Cruzeiro do Sul e pós-graduanda em Didática da Matemática pelo Instituto Vera Cruz.
Contato: sumadossi@gmail.com

Bárbara Ribeiro Soares Rama, Graduada em Pedagogia pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo e pós-graduanda em Didática da Matemática pelo Instituto Vera Cruz.
Contato: barbaracrsoares@gmail.com

Larissa Helena Deptula Pereira, Graduada em Pedagogia pela Universidade de São Paulo e pós-graduanda em Didática da Matemática pelo Instituto Vera Cruz.
Contato: lari_pereira@hotmail.com

Resumo

Este trabalho apresenta, à luz da Teoria das Situações Didáticas e por meio da pesquisa-ação, o registro e a análise de situações-problema propostas a alunos do 4º ano do Ensino Fundamental com o intuito de investigar se a divisão sucessiva do resto se mostra potente na compreensão da ideia de números racionais. Visando contribuir com a Didática da Matemática, discutem-se potenciais estratégias para que a compreensão da ideia dos números racionais seja mais naturalizada, e não contraposta aos conhecimentos sobre os números naturais.
Palavras-chave: Didática da Matemática. Teoria das Situações Didáticas. Pesquisa-ação. Números racionais. Divisão.

Abstract

This article seeks to contribute to studies on the construction of the concept of percentage by 5th grade students. It investigates the hypothesis that work-ing with graphic representations, based on equivalence relations between unit and centesimal fractions, contributes to the construction of the concept of percentage. The methodology used was action-research, in a collaborative perspective, carried out in a class at a private school in the city of São Paulo. The analysis of the collected data allowed us to conclude that the graphical representations favored the construction of the concept of percentage and favored a significant reflection on the equivalence between percentages and fractions.

Key words: Didactics of Mathematics. Action Research. Study of fractions. Graphic Representation. Percentage.

Introdução

Este trabalho pretende discutir e analisar, por meio da Teoria das Situações Didáticas, as possibilidades, os sentidos, os diferentes registros e o potencial pedagógico quando se segue dividindo o "resto", a fim de compreender a ideia de números racionais.

A escolha deste tema de pesquisa justifica-se por ser um conteúdo complexo, que ocupa um lugar central na aprendizagem dos alunos no 4º e 5º anos do Ensino Fundamental e que supõe uma ruptura dos conhecimentos construídos por eles no âmbito dos números naturais.

Jahn e outros (1999) nos mostram, em suas pesquisas, que introduzir o estudo das frações por meio do modelo parte-todo, pela dupla contagem de partes em figuras igualmente divididas, induz os alunos a entender os números fracionários como dois números naturais, um em cima do outro, separados por um traço. Segundo Jahn e outros (1999, p. 14):

> Ora, nossas observações mostram que o modelo parte-todo associado à simples dupla contagem gera um conhecimento muito relativo ou local. Kieren (1988) mostra a fragilidade do modelo parte/todo quando afirma que essa metodologia induz ao processo de dupla contagem e não introduz a criança no campo dos quocientes. Essa forma de ensino faz com que a criança desenvolva no modelo geométrico um processo de dupla contagem para aprender a linguagem de frações. Os alunos aprendem

> que devem contar o número total de partes em que foi dividido o inteiro e usar esse número como o denominador e que devem contar o número de partes pintadas na figura e usá-lo para o numerador da fração. No entanto, os alunos provavelmente não compreendem por que esse novo número não pertence ao conjuntos dos inteiros, visto que estão sempre contando a quantidade de partes. Eles não relacionam esses dois inteiros, pois a interpretação de quociente não lhes é apresentada e com isso a relação entre numerador e denominador fica perdida, não se desenvolvendo a idéia de número fracionário representando também uma quantidade.

Nessa perspectiva, propusemos situações-problema que envolvessem os alunos em reflexões que, por sua vez, os encaminhassem à compreensão mais clara dos números racionais, de forma a comunicarem suas ideias e ampliarem seus conhecimentos acerca desse conteúdo.

Metodologia

A metodologia escolhida para este trabalho foi a pesquisa-ação, metodologia de pesquisa muito utilizada na área da Educação devido ao seu potencial reflexivo e cujo objetivo é o aprimoramento do ensino. Para que essa metodologia seja considerada academicamente faz-se necessário compreender que "a pesquisa-ação é uma forma de investigação-ação que utiliza técnicas de pesquisa consagradas para informar a ação que se decide tomar para melhorar a prática" (TRIPP, 2005, p. 446).

Durante a pesquisa-ação coletamos e registramos as evidências sobre as atividades realizadas em sala de aula. Optamos por registrar as informações utilizando gravações em áudio e registros feitos pelas crianças; dessa forma garantimos dados adequados, válidos e confiáveis. Neste trabalho faremos a descrição das aulas, encaminhamentos feitos pelas professoras e registros dos alunos para que possamos analisar os dados.

Desenvolvimento

Para responder à pergunta "Qual o potencial pedagógico de seguir dividindo o resto para que os alunos compreendam a ideia de fração?" nos pautamos no material "Matemática, fracciones y números decimales 4to grado: apuntes para la enseñanza", dirigido por Cecilia Parra e publicado pela Secretaria de Educación - Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires, em 2005. Esse material vem ao encontro de nossas concepções sobre o ensino dos números racionais de forma mais significativa e contextualizada para os alunos, por meio da resolução de situações-problema, e não de maneira fragmentada, iniciando por conteúdos "mais fáceis" até os "mais difíceis", como proposto na maioria dos materiais didáticos. Esse material apresenta uma série de atividades, cujo objetivo é propor transformações no ensino dos números racionais concebido na escola durante muito tempo. Além disso, visa contribuir com a articulação e a evolução desse conhecimento ao longo do ciclo, por meio de um trabalho que esteja mais contextualizado na sala de aula. Como explicitado na introdução desse material:

> O estudo de números racionais (frações) começa do conceito de divisão inteira, propondo que os alunos "continuem repartindo" o resto de uma divisão e quantifiquem a referida distribuição. Ao deixar aberta a possibilidade de que a distribuição seja realizada de diferentes maneiras, muitos alunos dividem o que já foi dividido e enfrentam o problema de quantificar essa ação. Além disso, as várias maneiras de fazer a divisão que surgem em classe trazem a necessidade de estabelecer a equivalência entre os números que representam essas divisões. Fração e equivalência de frações aparecem desde o início, embora esses assuntos não sejam tratados de maneira formal, mas no contexto em que emergem. [...] O conteúdo da divisão inteira, fração, fração de fração e fração equivalente aparecem juntos, enquanto o mesmo problema oferece um contexto que fornece pistas para os alunos lidarem." (GOBIERNO DE LA CIUDAD DE BUENOS AIRES, 2005, pp. 13 e 14, tradução nossa)

As propostas do material supracitado adequam-se à Teoria das Situações Didáticas (TSD) de Brousseau (2008), à luz da qual este trabalho pretende discutir as possibilidades em cada etapa das atividades problematizadoras.

A TSD procura oferecer oportunidades de interações do aluno com o objeto de conhecimento, de forma a ampliar as relações construídas, aprofundá-las e ressignificá-las, e, dessa maneira, o objeto a ser aprendido é único meio para controlar a situação apresentada.

O objetivo na TSD é aproximar o aluno do modo como é produzida a atividade científica verdadeira, dando a oportunidade de pesquisar, testar, levantar hipóteses e validá-las, levando-o a construir modelos, conceitos, teorias, generalizações e socializando os resultados. O papel do professor é providenciar situações favoráveis de modo que o aluno, nessa ação efetiva, transforme sua aprendizagem em saber.

Para Panizza (2006) a TSD trata-se de uma teoria de ensino que contribui para o surgimento artificial dos conhecimentos matemáticos na hipótese de que estes não são construídos espontaneamente.

De acordo com Almouloud (2016, p. 113), o objeto central da TSD é "a situação didática na qual são identificadas interações estabelecidas entre professor, aluno e saber". A relação entre professor, aluno e saber constitui o triângulo didático.

Segundo Brousseau (1999, *apud* PANIZZA, p.36),

> a teoria das situações aparece, então, como um meio privilegiado não somente para compreender o que os professores e alunos fazem, mas também para produzir problemas ou exercícios adaptados aos saberes e aos alunos e para produzir, finalmente, um meio de comunicação entre pesquisadores e professores.

Professores e alunos são atores essenciais na relação ensino-aprendizagem, porém é no estudo da relação dos alunos com os problemas e exercícios que Brousseau passa a estudar um terceiro elemento: o "meio" em que a situação evolui. Brousseau afirma (2008, p. 19): "[...] os comportamentos dos alunos revelam o funcionamento do 'meio', considerado como um sistema. Portanto, é o 'meio' que deve ser modelado".

Para compreender a escolha das situações-problema neste trabalho faz-se necessário também compreender um conceito fundamental de "meio", já que, nesta perspectiva, o aluno aprende por adaptações ao "meio", conceito este que evolui, cresce e se torna mais preciso ao longo dos anos. Segundo Perrin-Glorian (2017) existem não apenas três, mas quatro sistemas em interação: o "meio" pode ter diferentes atores, professores ou alunos, e tanto um quanto o outro podem atuar no "meio" ou receber informações do "meio".

Segundo Brousseau (2008) o "meio" deve ser autônomo e antagônico ao sujeito. De acordo com os pesquisadores Silva, Ferreira e Tozetti (2015), o meio deve ser autônomo, o aluno deve ser capaz de conduzir e tomar decisões a partir da situação proposta pelo professor, e o "meio" deve ser também antagônico, pois deve haver equilíbrio entre o que se propõe e a capacidade do aluno de se conduzir durante a atividade. Dessa forma, o "meio" deve ser organizado para a aprendizagem numa interação feita de desequilíbrios, assimilações e acomodações, permitindo ao aluno a reflexão sobre suas ações. Por isso, entendemos que:

> O aluno aprende adaptando-se a um "meio" que é um fator de dificuldades, de contradições, de desequilíbrios, um pouco como acontece na sociedade humana. Esse saber, fruto da adaptação do aluno, manifesta-se pelas respostas novas, que são a prova da aprendizagem. (BROUSSEAU,1986, p. 49 *apud* ALMOULOUD, 2007, p. 32)

Brousseau (1996) enfatiza que as situações de ensino devem ser criadas pelo professor de modo a aproximar o aluno do saber do qual ele deve se apropriar e passíveis de serem resolvidas de acordo com os conhecimentos anteriores que possui. Destaca ainda que, para aprender, o aluno deve ter um papel ativo diante de uma situação, responsabilizando-se pela busca da solução do problema proposto.

Neste trabalho, como integrantes do triângulo didático, podemos observar: alunos do 4º ano do Ensino Fundamental I, duas professoras e, para desempenhar uma das funções de "meio", as situações-problema.

As situações-problema foram utilizadas não como retomada de um conteúdo já trabalhado, mas como uma atividade de problematização, a fim de desestabilizar os conhecimentos já construídos e possibilitar reflexões, adaptações e criação de novas ideias de fração a partir da divisão com resto diferente de zero.

Registro da Prática

As aulas foram destinadas a alunos do 4º ano do Ensino Fundamental I e o objetivo era resolver situações-problema de divisão nas quais os alunos deveriam analisar a possibilidade de continuar a repartir o resto diferente de zero e abordar a divisão equitativa do resto.

Primeira aula:

Entramos em uma sala de 4º ano do Ensino Fundamental, da qual nenhuma de nós éramos professoras naquele ano, mas uma de nós já conhecia algumas crianças por ter sido professora delas em anos anteriores.

Para dar início à atividade nos apresentamos, dissemos que faríamos uma proposta e que nosso objetivo era saber a forma como eles pensavam. Propusemos que se organizassem em trios e distribuímos o problema 1 em uma folha:

1. **Para uma atividade, precisamos dividir 17 lápis de cor para um grupo de 4 crianças. Quantos lápis receberá cada criança?**

Pedimos que lessem e que registrassem estratégias pessoais para resolvê-lo de forma a tornar o pensamento visível[1] e claro.

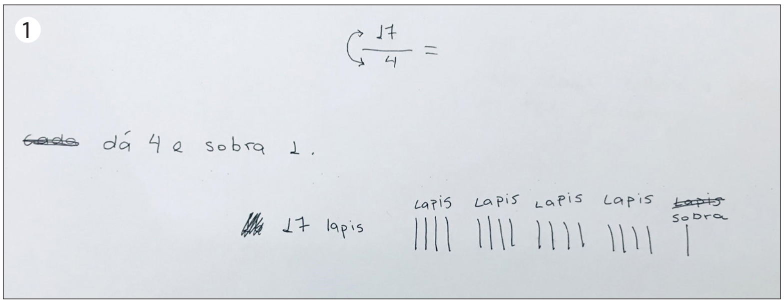
Logo de antemão, alguns disseram: "Não dá!" – ao perceberem que se tratava de um problema de divisão não exata. Para dois trios precisamos falar que era apenas para apresentar uma resolução, que não se preocupassem se estaria certo ou errado, pois trocaríamos ideias posteriormente.

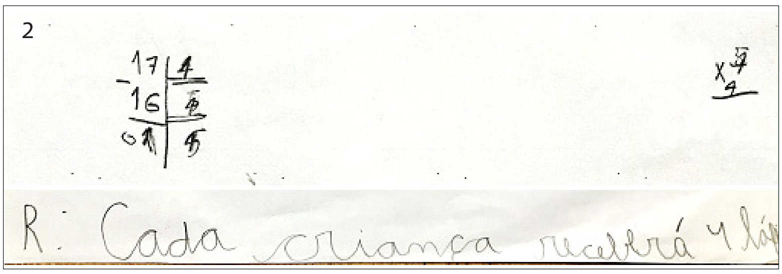
Esse momento caracteriza-se como uma situação de **ação** da TSD. De acordo com Brousseau (2008), a situação de ação dá a oportunidade aos alunos de tomarem decisões a partir de um "meio" antagonista em função de suas próprias motivações. Durante essa interação, acionam saberes anteriores para resolução da proposta e utilizam seu repertório de modo a modificá-lo a fim de resolver o problema.

Para Almouloud (2007, p. 38), a situação de ação "é essencial para o aluno exprimir suas escolhas e decisões por ações ao "meio". Nela, as interações estão centralizadas na tomada de decisões."

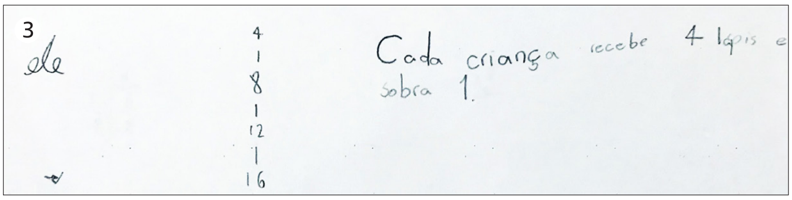
Todos os grupos apresentaram como solução que cada criança receberia 4 lápis e que sobraria 1. Mesmo o problema não deixando explícito que deveriam dividir igualmente, nenhum trio pensou em outra possibilidade.

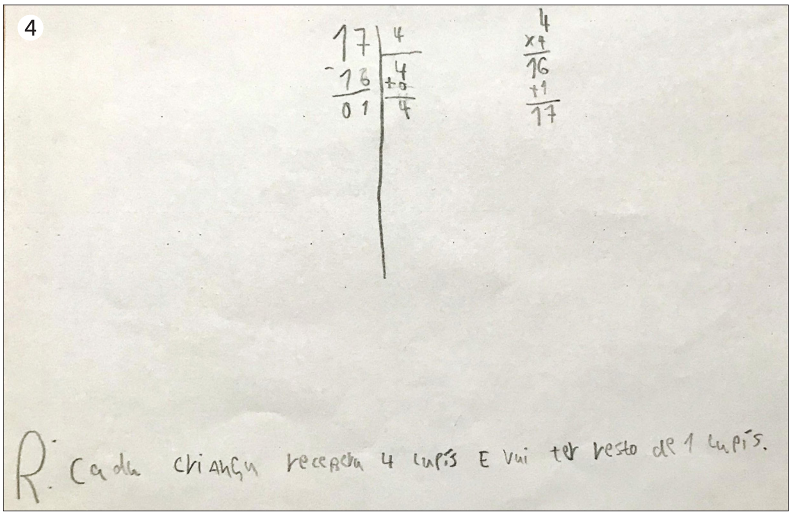
Seguem estratégias utilizadas:

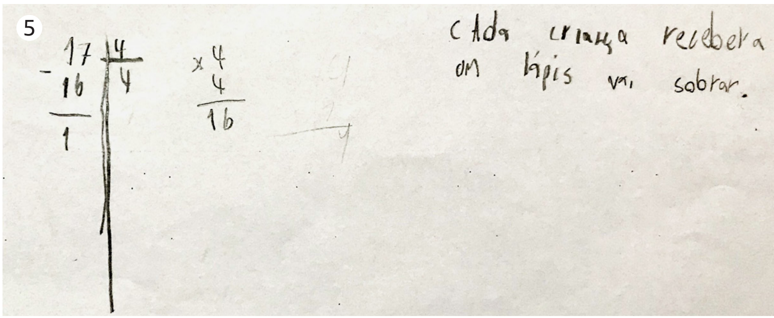




1. Entendemos pensamento visível, segundo a definição de Ron Ritchhart (2011), como uma estrutura conceitual e flexível que visa integrar o desenvolvimento do pensamento dos alunos com a aprendizagem de conteúdos de maneira transdisciplinar.







Nota-se que o trio que fez a resolução 1 utilizou a notação fracionária para representar uma divisão. Os alunos que fizeram essa estratégia apresentaram dúvidas logo no início, não conseguiam pensar numa forma de resolver nem representar, além da divisão 17/4. Sugerimos que fizessem, literalmente, a situação de divisão que estavam pensando. Para isso, eles pegaram 17 lápis e foram fazendo a distribuição um a um. Depois desenharam como tinha ficado. Nesse momento, sugerimos um possível recurso para que dessem continuidade ao que estavam pensando. Eles viabilizaram e conseguiram continuar desenvolvendo o raciocínio. Como Brousseau (1996, p. 55) se refere ao papel do professor:

> O trabalho do professor consiste, então, em propor ao aluno uma situação de aprendizagem para que elabore seus conhecimentos como resposta pessoal a uma pergunta, e os faça funcionar ou os modifique como resposta às exigências do meio e não a um desejo do professor.

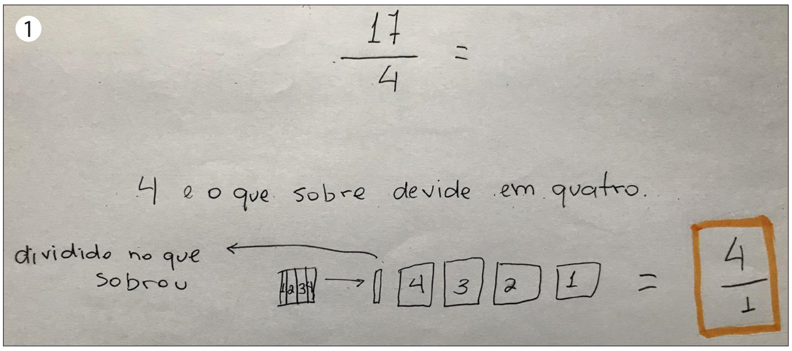
A resolução 2 foi feita por meio de uma divisão com resto, mas, na resposta do problema, os alunos não consideraram o resto 1. Houve uma tentativa de fazer a prova real, 4 x 4, mas não registraram a resposta. Já na resolução 3 foi feita uma contagem de 4 em 4, por meio da qual notaram quantos "quatros" conseguiram contar até chegar ao 17 ou mais próximo dele, no caso, até o 16. Perceberam então que foram 4 e que sobraria 1. Eles consideraram o resto 1 em sua resposta.

A resolução 4 foi bem semelhante à resolução 2, porém fizeram a prova real, utilizando o cálculo inverso 4 x 4 + 1 e consideraram o resto 1 em sua resposta. A resolução 5 foi semelhante à resolução 4, porém não fizeram a prova real de forma "completa", não consideraram o resto 1, embora o tenham considerado na resposta do problema.

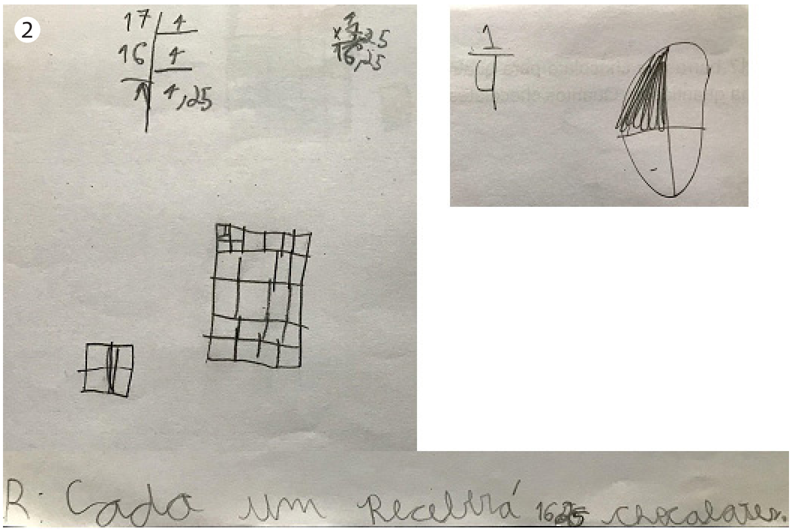
Após todos resolverem o problema 1, não fizemos um momento de socialização. Optamos por fazê-lo no final, contrapondo as ideias dos dois problemas. Então, assim que todos registraram suas ideias, na mesma aula, entregamos o problema 2 em outra folha:

2. Divida 17 barras de chocolate para 4 crianças, de forma que todos recebam a mesma quantidade. Quantos chocolates receberá cada um?

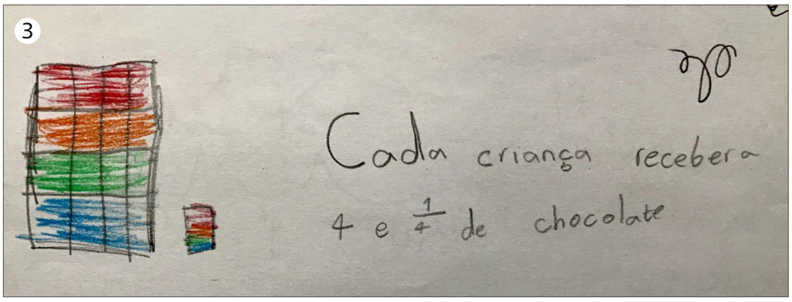
Novamente pedimos que lessem e que registrassem estratégias pessoais para resolvê-lo de forma a tornar o pensamento claro e visível. Embora, ao receberem o problema, tenham dito "Mas é a mesma coisa!", percebemos que, após a primeira resolução, sentiram-se mais tranquilos com o problema 2 e não solicitaram tanta ajuda. Apenas pedimos uma leitura mais cuidadosa para verem se não tinha uma resolução diferente. Novamente os alunos se deparam com uma situação de **ação**, segundo a TSD, pela qual "atuaram sobre o "meio" e colocaram em prática conhecimentos implícitos" (PANIZZA, 2006, p. 39). Seguem estratégias utilizadas, mantendo a numeração das resoluções dos problemas 1 e 2 dos mesmos trios para melhor analisarmos:



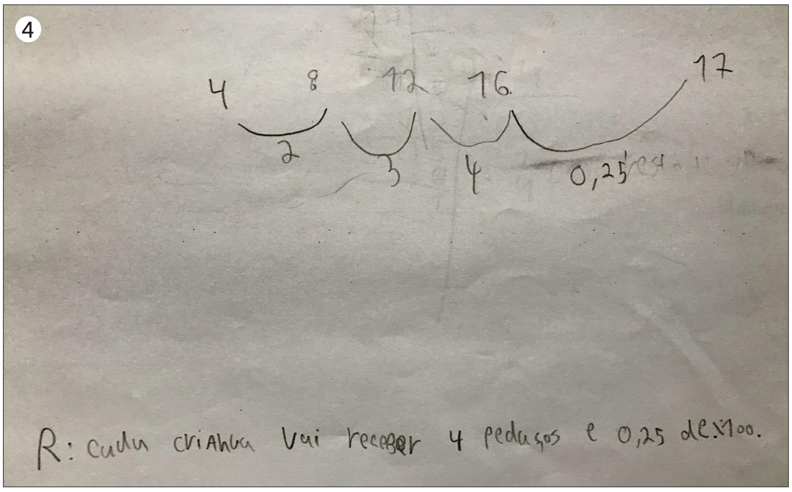
2


R: Cada um Recebrá 16,25 chocolates.

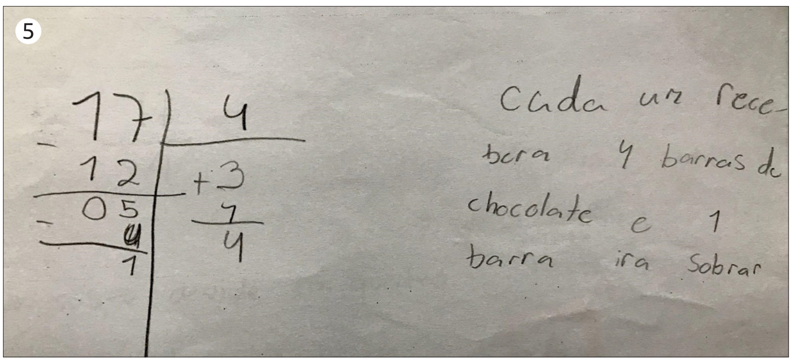
3


Cada criança recebera
4 e $\frac{1}{4}$ de chocolate

4


4 8 12 16 17
2 3 4 0,25
R: cada criAnça vai receber 4 pedaços e 0,25

5


Cada um rece-
bera 4 barras de
chocolate e 1
barra ira sobrar

Os alunos que fizeram a resolução 1 utilizaram novamente a notação de fração para representar uma divisão. Utilizaram a solução do problema 1, mas deram continuidade, explicando que o pedaço de chocolate restante poderia ser dividido em quatro. Usaram a notação fracionária equivocada 4/1, quando queriam representar ¼, de acordo com o que representaram no desenho.

Na resolução 2, encontramos a mesma divisão utilizada no problema 1, mas o resto continua sendo dividido. Eles representaram um círculo dividido em quatro partes e pintaram uma delas, representando o que cada criança receberia. Na resposta utilizaram a notação decimal, embora tenham se equivocado escrevendo 16,25 para cada um e não 4,25. Quando os confrontamos sobre como chegaram a essa resposta, disseram que imaginaram que o pedaço restante era um real, que é 100 centavos, que dividido em 4 daria 25 centavos, ou seja, 0,25.

Na resolução 3, os alunos representaram cada cor como a parte de chocolate que cada criança receberia, ou seja, 4 inteiros mais ¼.

Já na resolução 4 foi feita uma contagem de 4 em 4 até o 16. Do 16 para o 17, colocaram 0,25. Conseguiram fazer a divisão, mas na resposta usaram notação decimal misturada à porcentagem, 0,25 de 100%, quando seria apenas 25% da décima sétima barra.

Somente o último trio não considerou que o chocolate poderia continuar sendo repartido, por isso fez a divisão e manteve a resposta do problema 1: 4 para cada e sobra 1. Fizeram bem rápido e mantiveram a ideia inicial de que os problemas 1 e 2 eram iguais.

Nota-se que a maioria dos grupos acionou primeiramente um esquema de notações não convencionais como forma de expressão das propriedades gerais da divisão para, então, partir para a notação convencional. Segundo Brizuela (2006), os símbolos e as notações criados pelos alunos para as frações são uma etapa crucial para a sua compreensão conceitual e o uso do desenho permite que as crianças compreendam, resolvam situações e adotem procedimentos que, de outra forma, estariam além do seu alcance.

Após a resolução dos problemas, propusemos que os alunos expusessem suas resoluções sobre a mesa e que circulassem entre as mesas, observando as outras estratégias. Eles deveriam intercalar, cada integrante do grupo, entre observar as estratégias dos outros trios e estar próximo à sua resolução para explicitá-la aos outros grupos que passassem para observá-la. Essa, segundo a TSD, pode ser caracterizada como uma situação de **formulação**. Segundo Panizza (2006, p. 39), nessa situação

> um aluno (ou grupo de alunos) emissor deve formular explicitamente uma mensagem destinada a outro aluno (ou grupo de alunos) receptor, o qual deve compreender a mensagem e agir de acordo com o conhecimento contido na mensagem.

Para Brousseau (2006), a **formulação** consiste em o sujeito refletir sobre sua estratégia inserindo-a em uma situação de comunicação em que consiga explicar suas decisões acerca do problema proposto. É o momento de transformar o conhecimento implícito em explícito, possibilitando ao sujeito retomar sua ação e reconstruí-la em um sistema linguístico.

Dessa observação e partilha de estratégias entre os grupos fizemos uma rotina de pensamento[2] , solicitando que descobrissem **um padrão e uma surpresa** nas estratégias de resolução observadas, verificando quais estratégias eram comuns e quais eles notaram que foram diferentes. Enquanto observavam as outras estratégias, pudemos perceber que expressaram mesmo a surpresa quando se depararam com as representações pictóricas, aparentando que fez muito sentido aos trios que não a utilizaram. Cada trio partilhou o padrão e a surpresa encontrados e fomos anotando os padrões e surpresas na lousa. Como padrão os alunos trouxeram o uso da divisão e que todos chegaram às mesmas respostas, e como surpresa o uso do desenho, da fração, do decimal e da porcentagem.

Após a discussão, disparamos a pergunta: "O que podemos fazer com o que sobrou?" Após alguns minutos para discussão nos trios, os alunos concluíram que há casos em que podemos continuar a divisão com o resto, como o chocolate, e em outros casos não, como o lápis. Concluíram que no problema do lápis obtém-se resto 1, enquanto no problema do chocolate pode-se quebrar o chocolate em 4 partes iguais e obter 1/4. Nem todas as crianças souberam nomear "um quarto", mas puderam representar no desenho. Tal situação qualifica uma situação de **validação**, ou seja, concluem juntos qual a solução do problema. Segundo Brousseau (2006, p. 30):

> Pressupõe-se que possuam as mesmas informações necessárias para lidar com uma questão. Colaboram na busca da verdade, ou seja, no esforço de vincular de forma segura um conhecimento a um campo de saberes já consolidados, mas entram em confronto quando há dúvidas.

2. As rotinas de pensamento configuram uma maneira sistemática e flexível de desenvolver habilidades de pensamento, como a metacognição. Um dos objetivos, além de promover práticas que incentivem a reflexão, é aprofundar o aprendizado, provocando novas ideias, fomentando a curiosidade, apresentando diferentes perspectivas etc. (*Ron Ritchhard, Mark Church, Karin Morrinson. Making Thinking Visible, 2011*)

> Juntos, encarregam-se das relações formuladas entre um "meio" e um conhecimento relativo a ele.

Segundo o material de base, de Buenos Aires:

> A atividade começa chamando os alunos a resolver problemas de distribuições equitativas nas quais a "ferramenta" de resolução é a divisão entre números naturais. Uma vez resolvidos os problemas, propõe-se analisar se "o que resta" em cada caso pode ou não continuar sendo distribuído. A ideia é confrontar as crianças com o seguinte fato: embora o relato da divisão "termina", a distribuição, em alguns casos, "não termina", porque o restante pode continuar a ser distribuído.[...] o professor convida, em cada caso, a pensar no que fazer com "o que resta". [...]
> Esta "entrada" tem como objetivo promover relações entre a divisão de números naturais e frações. (GOBIERNO DE LA CIUDAD DE BUENOS AIRES, 2005, p. 17, tradução nossa)

Segunda aula:

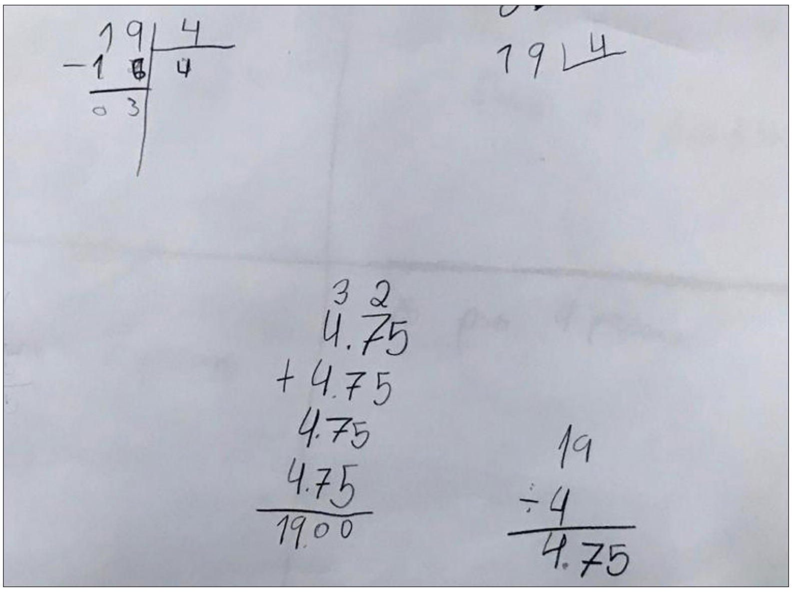
Na semana seguinte, e para as mesmas crianças, apresentamos outros dois problemas nos quais a consigna declarava que o resto deveria ser considerado.

1. **Divida 19 barras de chocolate para 4 crianças, de forma que todos recebam a mesma quantidade e que todo o chocolate seja repartido.**

Com os alunos agrupados em trios, não necessariamente os mesmos da primeira aula, retomamos a proposta da aula anterior e apresentamos o novo problema. Uma variável didática importante para o encaminhamento da atividade foi reforçar que nenhum chocolate poderia sobrar. A partir desse apontamento, os alunos foram, novamente, colocados em uma situação de **ação**, segundo a TSD, e os questionamentos começaram a surgir.

Os grupos utilizaram estratégias variadas de resolução: algoritmo; representação pictórica; alguns cortaram pedaços de papel, recorrendo ao material concreto como apoio; e alguns apelaram primeiramente ao material concreto (papéis picados) e depois armaram a divisão.

O grupo que decidiu pela divisão com o algoritmo resolveu o problema de maneira menos reflexiva, de modo que não sabiam explicar quanto era 0,75 de um inteiro.

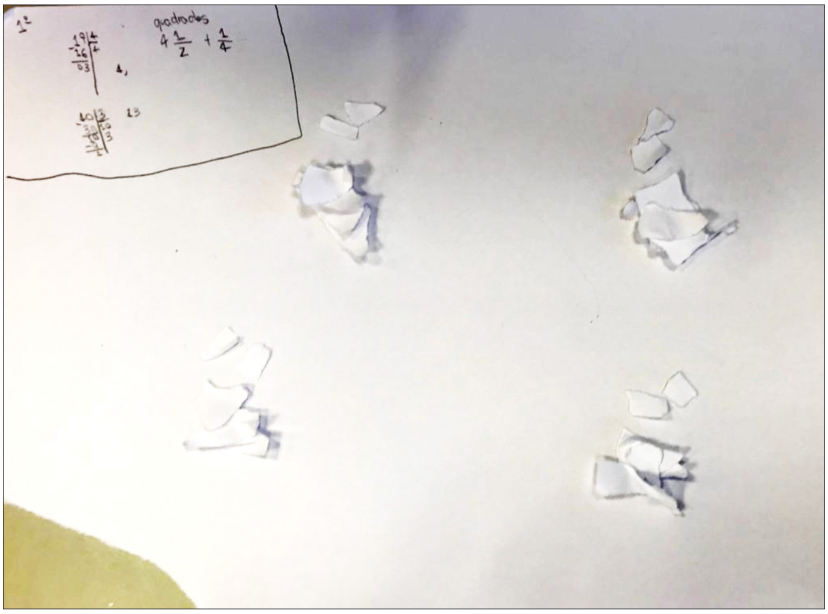


Um dos grupos que utilizou papéis para representar os chocolates dividiu um dos papéis cortados pela metade (½) e depois um quadrado em quatro partes (¼). Segundo eles: "A gente dividiu primeiro quatro chocolates e depois sobraram três. Aí a gente dividiu dois deles em dois pedaços e a gente entregou. Essa é a metade de um quadrado. Depois esse um que sobrou a gente dividiu em quatro pedaços".

O tamanho dos pedaços de papel era diferente, mas a representação mental que guiou a elaboração do material ajudou os alunos a estruturar o pensamento sobre o problema. Portanto, o tamanho dos pedaços de papel era irrelevante para eles, o que demonstra que iniciar o estudo das frações por meio da contagem de partes em figuras igualmente divididas não é determinante para a compreensão da ideia de fração. Além disso, também os ajudou a reestruturar as ideias sobre o problema, uma vez que reorganizaram as quantidades e as relações de chocolates para registrar a solução de quanto cada um havia recebido, reforçando a importância de recorrer às notações não convencionais como uma ferramenta potente na resolução do problema. Entendemos que

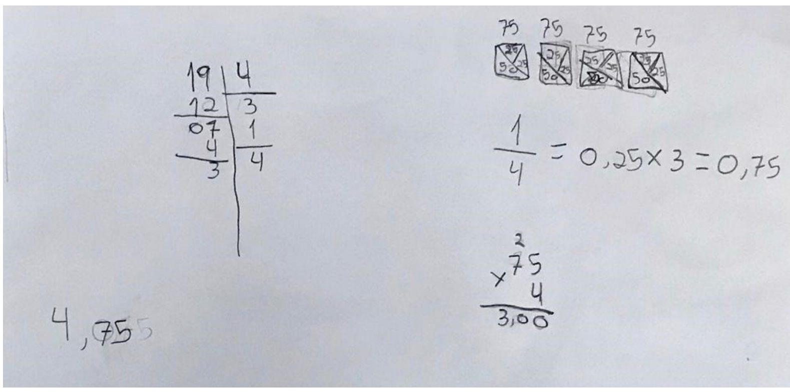
> A notação vem a ser uma espécie de 'imagem mental' (Piaget e Inhelder, 1966 / 1971) para sua compreensão do problema. Ao objetificar e reificar essa imagem mental, ela foi capaz de refletir sobre ela, clarificá-la e desenvolver seu pensamento sobre o problema. [...]

Embora as notações [...] não sejam convencionais, elas realmente constituem uma internalização de uma notação convencional, aceita no contexto da sala de aula, e a gradual apropriação dessa notação apoia e desenvolve seu raciocínio. (BRIZUELA, 2006, p. 80 e 81)



Este grupo partiu do algoritmo convencional, em que o resultado culmina inevitavelmente em uma representação decimal (4,75). Segundo os alunos, esse tipo de estratégia não os ajudou; portanto, manipularam os retalhos de papel. O grupo, apoiado no material elaborado por eles, foi capaz de apresentar os resultados utilizando a representação fracionária (4 + ½ + ¼).

Outro grupo também partiu do algoritmo convencional e, ao chegar ao resto (3), recorreu ao desenho para estabelecer as relações de valores para cada parte, ainda considerando a representação decimal. Os alunos entenderam que ¼ equivale a 0,25 e multiplicaram por três para chegar ao resultado (0,75). As conexões entre as representações fracionárias e decimais foram garantidas e utilizadas ambas como recurso para chegar à resolução final.



Cada grupo escolheu um outro grupo para socializar as estratégias e compararem os resultados. Esse momento configurou-se como uma situação de **formulação**, na qual os alunos precisaram explicitar por meio da linguagem a sua estratégia. Após esse momento, um aluno levantou a dúvida se as representações fracionária e decimal eram equivalentes, pois ambas haviam aparecido nas estratégias.

Considerando que o objetivo da aula era promover uma reflexão acerca do "resto" a fim de compreender a ideia dos números racionais, julgamos essa uma situação potente de **validação**, por meio da qual os alunos expressaram as razões que os levavam a entender que eram equivalentes. Os alunos que concordaram com a equivalência foram à lousa compartilhar o raciocínio que os levaram a ter essa opinião e os que discordaram fizeram o mesmo. Por fim, todos concordaram com a equivalência, após a explicitação dos colegas. Então, a relação entre decimais e fracionários como parte do conjunto de números racionais, ou seja, menores que *um inteiro*, foi estabelecida. Segundo Almouloud (2007, p. 39), "assim, a teoria (das situações didáticas) funciona, nos debates científicos e nas discussões entre alunos, como *milieu* (meio) de estabelecer provas ou refutá-las".

O próximo passo foi apresentar um novo exercício, com quatro problemas e verificar se as estratégias socializadas e discutidas ajudam a adotar novas maneiras de resolvê-los.

2. Considerando o problema anterior, divida:

a) 21 chocolates para 5 crianças

b) 10 chocolates para 3 crianças

c) 1 chocolate para 8 crianças

d) 25 chocolates para 4 crianças

Como uma rápida avaliação formativa, pedimos aos alunos que indicassem levantando a mão quem mudou a estratégia após as discussões e se observar os diferentes métodos de resolução ajudou a solucionar os novos problemas propostos. Grande parte dos alunos reagiu positivamente, confirmando a relevância das etapas de formulação e validação na construção do saber matemático.

Considerações finais

Com o intuito de contribuir para o aprimoramento do ensino de Matemática, propusemos, neste trabalho, discutir e analisar, a partir da Teoria das Situações Didáticas e por meio da pesquisa-ação, o potencial pedagógico de seguir dividindo o resto a fim de compreender a ideia de números racionais, pela resolução de situações-problema.

Consideramos que as situações-problema escolhidas atenderam os princípios da TSD, pois foram situações em que alunos precisaram agir, refletir, falar, se adaptar e criar formas de resolver os problemas a partir dos conhecimentos prévios, das interações com o "meio" e com as professoras.

Pudemos constatar, por meio da pesquisa-ação, que seguir dividindo o resto é uma maneira eficaz de os alunos construírem a ideia de números racionais. Trabalhar com elementos com restos ainda divisíveis, como o chocolate, que é algo concretamente passível de ser repartido em partes menores, traz aos alunos a possibilidade mais evidente de continuar a divisão. Embora nem todos tenham clareza das representações, sejam elas fracionárias ou decimais, eles demonstraram compreensão do inteiro que se divide em partes menores.

Não chegamos à situação de institucionalização da TSD, segundo Almouloud (2007, p. 40) "definidas como aquelas em que o professor fixa convencionalmente e explicitamente o estatuto cognitivo do saber", uma vez que acreditamos que o contínuo trabalho com divisão e as discussões, entre alunos e com a mediação do professor, trarão a compreensão da relação entre a divisão de números naturais e fração. Ainda segundo Almouloud (2007, p. 40), "depois da institucionalização, feita pelo professor, o saber torna-se oficial e os alunos devem incorporá-lo a seus esquemas mentais". Como descrito no material de Buenos Aires:

> Não achamos que, apenas resolvendo esses problemas, as crianças serão capazes de estabelecer imediatamente as relações entre divisão e frações. Essas relações serão o resultado de um longo trabalho em que outros problemas devem necessariamente ser incluídos e, principalmente, discussões deles que o professor provoca com a intenção de que os alunos concebam a fração como o resultado exato de uma divisão entre números. naturais. [...]

Um trabalho mais ou menos prolongado com situações de divisão é proposto, com a intenção de que estes se tornem pontos de referência para crianças para as quais elas possam se voltar para enfrentar outros problemas envolvendo o conceito de fração. (GOBIERNO DE LA CIUDAD DE BUENOS AIRES, 2005, p. 17, tradução nossa)

Também evidenciamos que, dessa forma, os alunos constroem o conhecimento sobre os números racionais de maneira abrangente, tanto decimais quanto fracionários, entendendo-os como equivalentes.

Por fim, a TSD, mais uma vez, revela-se potente enquanto proposta de construção de conhecimentos, uma vez que os alunos reconhecem que pensar nas situações-problema, conhecer e entender o modo de pensar do outro, amplia suas possibilidades e consequentemente a compreensão do conhecimento em questão.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, Saddo A. Modelo de ensino/aprendizagem baseado em situações-problema: aspectos teóricos e metodológicos. *Revista Eletrônica de Educação Matemática*, Florianópolis, v. 11, n. 2, pp. 109-141, 2016. Disponível em: <https://doi.org/10.5007/1981-1322.2016v11n2p109>. Acesso em: 13 jul. 2020.

ALMOULOUD, Saddo A. *Fundamentos da didática da matemática*. Curitiba: Ed. UFPR, 2007.

BRIZUELA, Bárbara M. *Desenvolvimento Matemático na Criança* - Explorando Notações. Porto Alegre: Artmed, 2006.

BROUSSEAU, Guy. *Introdução ao Estudo das Situações Didáticas*: Conteúdos e métodos de ensino. São Paulo: Ática, 2008.

BROUSSEAU, Guy. Os diferentes papéis do professor. In: PARRA, Cecília; SAIZ, Irma (Orgs.). *Didática da Matemática*: Reflexões Psicológicas. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996. Cap. 4. p. 54-78.

BRUN, Jean (Org.). *Didáctica das Matemáticas*. Lisboa: Instituto Piaget, s/d.

FERREIRA DA SILVA, Maria José. *Investigando Saberes de Professores do Ensino Fundamental com Enfoque em Números Fracionários para a Quinta Série*. Tese de Doutorado em Educação Matemática. PUC-SP, 2005.

GOBIERNO DE LA CIUDAD DE BUENOS AIRES. Ministerio de Educación. *Matemática, fracciones y Números decimales 4to grado*: apuntes para la enseñanza" / dirigido por Cecilia Parra - 1ª ed. Buenos Aires: Secretaria de Educación - Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires, 2005. pp. 17 a 20.

JAHN, A.P. et al. *Lógica das equivalências*. In: 22ª Reunião Anual da ANPEd - Associação Nacional de Pós-graduação e Pesquisa em Educação. Caxambu/MG. 1999.

PANIZZA, Mabel. *Ensinar matemática na educação infantil e nas séries iniciais*: análise e propostas/ Mabel Panizza; tradução Antonio Feltrin. Porto Alegre: Artmed, 2006.

PERRIN-GLORIAN, Marie-Jeanne. *From producing optimal teaching to analysing usual classroom situations*. Development of a fundamental concept in the theory of didactic situations: the notion of milieu. The first century of the International Commission on Mathematical Instruction (1908-2008). Rome, Italy, Mar 2008.

RITCHHARD, Ron. *Making Thinking Visible*: How To Promote Engagement, Understanding, And Independence For All Learners. San Francisco, CA: Jossey-Bass, 2011. Print.

SILVA, N.A.; FERREIRA M.V.V.; TOZETTI, K.D. *Um estudo sobre a situação didática de Guy Brousseau*. In: XII CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO (EDUCERE), 2015.

TRIPP, David. *Pesquisa-ação*: uma introdução metodológica. Educ. Pesqui. 2005, vol.31, n.3, pp. 443-466.

Recebido em: 20/05/2020.
Aceito em: 16/07/2020.